SADOSKY - GUBER

Elementos de Cálculo Diferencial e Integral

Σ

$\int dx$

LIBRERIA Y EDITORIAL ALSINA

SADOSKY
GUBER

CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

II



BUENOS
AIRES

ELEMENTOS DE CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Fascículo II

CALCULO INTEGRAL

MANUEL SADOSKY — REBECA CH. DE GUBER
DOCTORES EN CIENCIAS FISICOMATEMÁTICAS

ELEMENTOS DE CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Fascículo II

CALCULO INTEGRAL

DECIMA QUINTA EDICION
corregida y aumentada



LIBRERIA Y EDITORIAL ALSINA

PARANA 137 BUENOS AIRES

1980

IMPRESO EN ARGENTINA

SEGUNDA PARTE - CALCULO INTEGRAL

INDICE

PÁG.

Capítulo X. — INTEGRALES INDEFINIDAS

Capítulo XI. — INTEGRALES DEFINIDAS

Capítulo X

INTEGRALES INDEFINIDAS

1. INTRODUCCION

Hemos visto que la derivada de una función $y = f(x)$ puede interpretarse geométricamente como la pendiente de la recta tangente.

Para la función $y = x^2$ la derivada $y' = 2x$ mide, para cada punto de abscisa x, la tangente trigonométrica o pendiente del ángulo α que forma la recta tangente con el semieje positivo de las x.

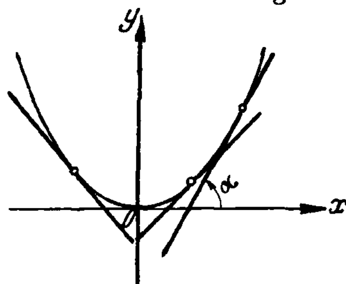


Fig X-1

Consideremos ahora el siguiente problema, en cierta forma inverso del anterior. Se asigna a cada punto del plano de abscisa x una dirección tal que su pendiente sea igual al doble de la abscisa x.

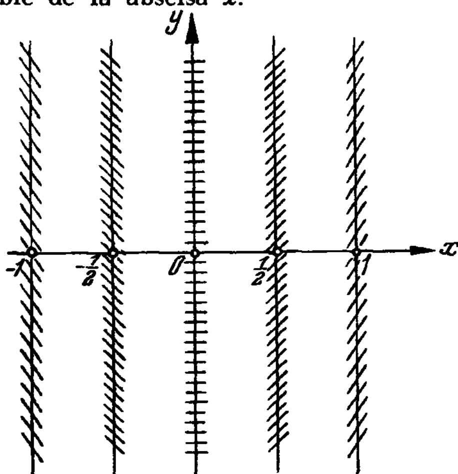


Fig X-2

Así, a todos los puntos de abscisa $x = \frac{1}{2}$ les deben corresponder direcciones tales que sea $\operatorname{tg} \alpha = 2 \times \frac{1}{2} = 1$, es decir, $\alpha = 45°$, a los de abscisa $x = 1$, direcciones de 63°26′, a los de abscisa $-\frac{1}{2}$, direcciones de 135°, etc. Es claro que en la figura 2 sólo se han señalado algunas de esas direcciones, porque, de lo contrario, se obtendría una mancha negra.

¿Cuál es la curva o las curvas que en cada punto tienen como pendiente esa dirección prefijada? Evidentemente la curva $y = x^2$ satisface a esa exigencia. Pero también la satisfacen las curvas $y = x^2 + 3$, $y = x^2 - 1$, etc., y, en general, todas las curvas que responden a la ecuación $y = x^2 + C$ (C, constante)

Vemos entonces que, mientras el cálculo de las derivadas conduce a un resultado único, el cálculo de las *primitivas* —esto es, el cálculo de aquellas funciones que tienen una derivada dada— tiene infinitas soluciones.

Subsiste aún una cuestión: ¿Todas las soluciones están representadas por la fórmula $y = x^2 + C$? Así es, pues de acuerdo con el

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL: *Todas las funciones que tienen igual derivada difieren entre sí en una constante,* o, en otros términos, *todas las primitivas de una misma función difieren entre sí en una constante*

La demostración ya se ha visto en la página 240.

Conviene destacar la importancia de este teorema de demostracion tan elemental

Cuando se efectúa la suma $a + b$ de 2 números el resultado es *único* Se dice que la adicion goza de la propiedad *uniforme* También tienen esta propiedad las otras operaciones racionales (diferencia, producto, cociente o potencia). La radicacion, en cambio, no es uniforme, sino multiforme Así, $\sqrt{4}$ es igual a $+2$ o a -2 y habrá que aclarar a cuál de las 2 determinaciones nos referimos En el campo de los números complejos la logaritmacion es *infinitiforme,* es decir, tiene infinitas determinaciones, por ejemplo, las infinitas determinaciones del logaritmo neperiano de 2 están comprendidas en la formula $\ln 2 + 2k\pi i$, con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3,$ Conocido un valor del logaritmo se conocen todos los demás agregándole un número entero de veces $2\pi i$

En el cálculo de las primitivas vemos que tambien hay infinitas soluciones, pero, toda vez que se conozca una funcion que satisfaga al problema, se conocen todas las soluciones, pues cualquier otra función que sea solución debe diferir de la primera en una constante. En otras palabras una vez encontrada una funcion tal que su derivada coincida con la expresion dada hemos encontrado *todas* las funciones que cumplen esa condición

Así, si buscamos una función cuya derivada sea $\frac{1}{(1+x)^2}$, o sea, si buscamos la *primitiva* de $\frac{1}{(1+x)^2}$ y verificamos que tanto $\frac{x}{x+1}$ como $\frac{-1}{x+1}$ son soluciones, *con seguridad* estas 2 expresiones deben diferir en una constante. En este caso es $\frac{x}{x+1} - \left(-\frac{1}{x+1}\right) = \frac{x+1}{x+1} = 1$

Verifique el lector que tanto $\frac{1}{2}(x+6)$ como $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ son primitivas de $\frac{1}{2}$. Revisando las fórmulas trigonométricas encontrará que las dos funciones difieren en la constante 3, pues es $\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}x$

2. INTEGRALES INDEFINIDAS

Hemos designado con el nombre de primitiva $F(x)$ de una función $f(x)$ a una expresión tal que cumpla la relación $F'(x) = f(x)$, y designaremos con el nombre de *integral indefinida*

$$\int f(x)\,dx$$

(que se lee "integral de efe de x diferencial x") a la expresión *más general* cuya derivada sea $f(x)$ o, lo que es lo mismo, cuya diferencial sea $f(x)\,dx$.

De acuerdo al teorema fundamental es

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Propiedades:

1°) En virtud de la definición es

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx,$$

lo cual pone en evidencia que el signo d "destruye", al precederlo, al signo $\int$.

Si $F(x)$ es una integral de $dF(x)$, es

$$\int dF(x) = F(x) + C,$$

y esta expresión muestra que el signo $\int$ "destruye" al signo d si se agrega una constante a la función. Sólo con estas aclaraciones puede decirse que la diferenciación e integración son operaciones inversas.

2°) *Linealidad de la integración.* Puesto que en el cálculo de derivadas y diferenciales hemos visto que es

$$d[Cf(x)] = Cdf(x)$$

y

$$d(u + v - w) = du + dv - dw,$$

resulta

$$\int Cf(x)\,dx = C\int f(x)\,dx$$

y

$$\int (u + v - w)\,dx = \int udx + \int vdx - \int wdx,$$

y, en general, la integral de una expresión lineal de varias funciones es igual a la expresión lineal de las integrales correspondientes:

$$\int [C_1f_1(x) + C_2f_2(x) + \ldots + C_nf_n(x)]\,dx =$$

$$= C_1\int f_1(x)\,dx + C_2\int f_2(x)\,dx + \ldots + C_n\int f_n(x)\,dx.$$

Este es el principio de la "*integración por descomposición*".

INTEGRACIÓN INMEDIATA: La simple lectura de una tabla de derivadas nos da una tabla de integrales. Así, de

$$Dx^{\alpha+1} = (\alpha + 1)\, x^{\alpha} \quad \text{resulta} \quad (\alpha + 1) \int x^{\alpha}\, dx = x^{\alpha+1} + C_1,$$

es decir,

$$\text{(I)} \quad \int x^{\alpha}\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C, \quad \text{si } \alpha \neq -1.$$

Si $\alpha = -1$, recordando que $D(\ln x) = \dfrac{1}{x}$ se obtiene

$$\text{(II)} \quad \int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$

El lector justificará fácilmente la siguiente tabla efectuando las diferenciaciones correspondientes ([1]):

$$\text{(III)} \quad \int e^{x}\, dx = e^{x} + C.$$

$$\text{(IV)} \quad \int a^{x}\, dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C.$$

$$\text{(V)} \quad \int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C.$$

$$\text{(VI)} \quad \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C.$$

$$\text{(VII)} \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + C.$$

$$\text{(VIII)} \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\operatorname{cotg} x + C.$$

$$\text{(IX)} \quad \int \operatorname{Sh} x\, dx = \operatorname{Ch} x + C.$$

$$\text{(X)} \quad \int \operatorname{Ch} x\, dx = \operatorname{Sh} x + C.$$

$$\text{(XI)} \quad \int \frac{dx}{\operatorname{Ch}^2 x} = \int \operatorname{Sech}^2 x\, dx = \operatorname{Th} x + C.$$

$$\text{(XII)} \quad \int \frac{dx}{\operatorname{Sh}^2 x} = \int \operatorname{Csech}^2 x\, dx = -\operatorname{Cth} x + C.$$

$$\text{(XIII)} \quad \int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

$$\text{(XIV)} \quad \int \frac{dx}{1 - x^2} = \operatorname{Arg\,Th} x + C = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} + C.$$

([1]) Utilizamos en la tabla exclusivamente la letra x para designar la variable Evidentemente, podíamos haber operado con cualquier otra.

(XV) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \text{arc sen}\, x + C.$$

(XVI) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \text{Arg Sh}\, x + C = \ln\left[x + \sqrt{x^2 + 1}\right] + C.$$

(XVII) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \text{Arg Ch}\, x + C = \ln\left[x + \sqrt{x^2 - 1}\right] + C.$$

Ejercicios

Verificar las siguientes integrales

1. $\int x^6 dx = \frac{1}{7}x^7 + C$ 2 $\int 4Az^2 dz = \frac{4}{3}Az^3 + C.$

3 $\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + C.$

(Recuérdese que se puede escribir $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$).

4 $\int \sqrt{bx} = \frac{2}{3}x\sqrt{bx} + C$

(Téngase presente que b es constante y que $\sqrt{x}$ es $x^{\frac{1}{2}}$)

5 $\int \frac{1}{2}\frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{y} + C$

6 $\int (3x^2 - 2x + 1)\, dx = x^3 - x^2 + x + C$

7 $\int \frac{4x^5 + 2x^3 + x - 1}{x^2} dx = x^4 + x^2 + \ln x + \frac{1}{x} + C$

(Efectúese el cociente indicado)

8 $\int \frac{x^3 + x + 1}{1 + x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 + \text{arc tg}\, x + C$

(Téngase presente que la expresión subintegral se puede escribir $x + \frac{1}{1 + x^2}$, como se ve haciendo el cociente)

9. $\int \left(2x^{\frac{3}{5}} - x^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}}\right) dx = \frac{5}{4}x^{\frac{8}{5}} - \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} + \frac{1}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$

10 $\int \frac{3x^3 - \sqrt{x}}{x} dx = x^3 - 2\sqrt{x} + C.$

(Efectúese primero el cociente).

11 $\int \left(\frac{x^3}{a} - \frac{a}{x^3}\right) dx = \frac{1}{4}\frac{x^4}{a} + \frac{1}{2}\frac{a}{x^2} + C.$

12 $\int \left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right) dx = \frac{1}{4}x^2 - 2\ln x + C.$

13. $\int x(\sqrt{x}-5)\,dx = x^2\left(\frac{2}{5}\sqrt{x}-\frac{5}{2}\right)+C$

(Efectúese primero el producto)

14 $\int\left(3\cos x - e^x + \frac{5}{x}\right)dx = 3\operatorname{sen} x - e^x + 5\ln x + C$

15 $\int\left(\operatorname{sen}\frac{1}{2}x + \cos\frac{1}{2}x\right)^2 dx = x - \cos x + C.$

16 $\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arc\,sen} x + x + C$

17 $\int 3^u\,du = \frac{3^u}{\ln 3} + C = \frac{3^u M}{\lg 3} + C.$

($M = 0{,}43429$ .. es el módulo de la transformación de logaritmos neperianos en decimales, como se vió en pág 64)

18 $\int\left(\operatorname{Sh}\frac{1}{2}x + \operatorname{Ch}\frac{1}{2}x\right)^2 dx = \operatorname{Ch} x + \operatorname{Sh} x + C$

(Recuérdese la formula $[\operatorname{Sh} u + \operatorname{Ch} u]^n = \operatorname{Sh} nu + \operatorname{Ch} nu$)

Calcular las siguientes integrales (1)

1 $\int (2+3x)^2\,dx$

(Desarróllese la potencia e intégrese la suma)

2. $\int x(1+x^2)\,dx$

3. $\int\left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx$

4 $\int\left(z^3 - \frac{1}{z^3}\right)^2 dz$

5. $\int\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

6. $\int \frac{1+x}{\sqrt{x}}\,dx$

7. $\int \frac{z^3-2}{z^4}\,dz$

8. $\int \sqrt[4]{ax^3}\,dx$

9 $\int (\sqrt{x}+\sqrt{a})^2\,dx.$

10 $\int \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{a})^2}{\sqrt{x}}\,dx$

(1) Los ejercicios propuestos llevan la respuesta al final del capítulo, páginas 342-343.

11. $\displaystyle\int \frac{3x\,dx}{(1+2x^2)^4}$.

12. $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{1-x^{2m}}{1-x^2}\,dx$.

14. $\displaystyle\int \frac{1-x^m}{1-x}\,dx$

(m entero mayor que la unidad).

3. INTEGRACION POR SUSTITUCION

Si deseamos calcular

$$I = \int (3x+1)^2\,dx$$

y revisamos la tabla de integrales, vemos que, si bien no aparece en ella la función subintegral $(3x+1)^2$, se podrá llevar a la fórmula (I) haciendo la sustitución $3x+1=z$. Pero entonces habrá que sustituir también dx por la expresión correspondiente de dz. Diferenciando ambos miembros resulta $3\,dx = dz$, o sea, $dx = \frac{1}{3}dz$. Queda entonces $(3x+1)^2\,dx = \frac{1}{3}z^2\,dz$ y las integrales correspondientes serán iguales [1]:

$$I = \int (3x+1)^2\,dx = \int \frac{1}{3}z^2\,dz = \frac{1}{3}\int z^2\,dz = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}z^3 + C_1\right] =$$

$$= \frac{1}{9}z^3 + C.$$

Reemplazando z por su expresión en función de x, resulta

$$I = \frac{1}{9}(3x+1)^3 + C.$$

Es fácil verificar la exactitud del resultado pues derivando respecto de x, de acuerdo a la regla de derivación de una función de función se tiene·

$$I'(x) = \frac{1}{9}\cdot 3\,(3x+1)^2\cdot 3 = (3x+1)^2$$

En realidad, también puede calcularse la integral propuesta desarrollando directamente el cuadrado e integrando término a término Verifique el lector que el resultado que así se obtiene coincide con el que acabamos de lograr

---

[1] Al demostrar que las diferenciales son iguales podremos asegurar que las primitivas difieren a lo sumo en una constante, por tratarse de integrales indefinidas esa constante ya se considera incluída.

También se podía haber procedido en la siguiente forma:

Para llevar la integral $\int (3x+1)^2\,dx$ al tipo $\int u^a\,du$ debe aparecer, en lugar de dx, la expresión $d\,(3x+1)$, que es igual a $d\,(3x) + d\,(1) = d\,(3x) = 3\,dx$. Resulta entonces $dx = \frac{1}{3} d\,(3x+1)$. Reemplazando se tiene

$$\int (3x+1)^2\,dx = \frac{1}{3}\int (3x+1)^2\,d\,(3x+1),$$

y esta expresión es del tipo $\int u^2\,du = \frac{1}{3}u^3 + C$, siendo $u = 3x+1$. Resulta finalmente

$$\int (3x+1)^2\,dx = \frac{1}{3}\int (3x+1)^2\,d\,(3x+1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}(3x+1)^3 + C =$$
$$= \frac{1}{9}(3x+1)^3 + C.$$

Una tercer manera de proceder es la siguiente:

Puesto que $(3x+1)^2$ es, a menos de un factor constante, la derivada de $(3x+1)^3$, empezamos por calcular esta derivada:

$$D\,(3x+1)^3 = 3\,(3x+1)^2\;3 = 9\,(3x+1)^2.$$

Entonces la derivada de $\frac{1}{9}(3x+1)^3$ resultará $(3x+1)^2$, que es la expresión subintegral Se tiene entonces

$$\int (3x+1)^2\,dx = \frac{1}{9}(3x+1)^3 + C.$$

Veamos otro ejemplo de integracion por sustitución siguiendo los 3 procedimientos indicados en el caso anterior

Sea calcular

$$J = \int \frac{dx}{2x+5}.$$

1°) Haciendo la sustitución $2x + 5 = z$ resulta, diferenciando ambos miembros, $2\,dx = dz$, o sea, $dx = \frac{1}{2}dz$ Entonces es

$$J = \int \frac{dx}{2x+5} = \int \frac{\frac{1}{2}dz}{z} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\ln z + C = \frac{1}{2}\ln\,(2x+5) + C.$$

2°) En el numerador hacemos aparecer el diferencial del denominador. Como es $d\,(2x+5) = d\,(2x) + d(5) = 2\,dx$, se tendrá

$$J = \int \frac{dx}{2x+5} = \int \frac{\frac{1}{2}d\,(2x+5)}{2x+5} = \frac{1}{2}\int \frac{d\,(2x+5)}{2x+5} = \frac{1}{2}\ln\,(2x+5) + C,$$

ya que la tabla indica (formula 11) que la integral del cociente entre la diferencial de una función y la funcion es el logaritmo de la funcion más una constante.

3°) Puesto que el denominador es una expresion lineal en x, es evidente que —a menos de un factor numérico— es la derivada del logaritmo de esa expresión Calculando primero esa derivada resulta

$$D\,[\ln\,(2x+5)] = \frac{1}{2x+5}\cdot 2.$$

Por consiguiente, $\frac{1}{2}\ln\,(2x+5)$ tiene como derivada la expresion subintegral

$$J = \int \frac{dx}{2x+5} = \frac{1}{2}\ln\,(2x+5) + C$$

Observaciones:

Estos simples ejemplos muestran ya que es más difícil integrar que derivar Para hacer una derivación basta aplicar unas pocas reglas, mientras que para hacer integraciones habrá que tener presente las correspondientes reglas inversas de las anteriores y además adquirir una cierta pericia para llevar la función subintegral a alguno de los tipos standard que figuran en la tabla

Por otra parte, por complicada que sea la expresion que resulte de combinar las funciones que hemos estudiado, siempre se podrá calcular su derivada aplicando reiteradamente la regla de derivación de una funcion de función En cambio, si se escribe una expresión subintegral cualquiera, *en general* no se podrá calcular la integral correspondiente. Por eso en los libros las integrales aparecen cuidadosamente seleccionadas y escalonadas en cuanto a su dificultad, a fin de que el estudiante se vaya familiarizando con los distintos procedimientos de cálculo.

Cabe recomendar entonces, que se hagan *muchos* ejercicios de integracion. Así se irán aprendiendo todos los trucos que el calculista experimentado aplica con rapidez

Hay finalmente otra circunstancia que queremos señalar para evitar que el lector se descorazone ante algunas dificultades Como durante un cierto tiempo ha estado aplicando una serie de reglas de derivación, a veces comete errores de este tipo Los principiantes dicen "La integral de $\operatorname{sen} x$ es $\cos x$", cuando en realidad es $-\cos x$. Estos casos de inercia mental son bastante frecuentes Si se pregunta quién mató a Caín, casi seguramente se responderá que fué Abel

Ejemplos

1°) Calcular $I_1 = \int \frac{3x^2\,dx}{\sqrt{5x^3+1}}$.

Haciendo la sustitución $5x^3+1=z$ se obtiene, diferenciando ambos miembros, $15x^2\,dx = dz$, es decir, $3x^2\,dx = \frac{1}{5}dz$:

$$I_1 = \int \frac{3x^2\,dx}{\sqrt{5x^3+1}} = \int \frac{\frac{1}{5}dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{5}\int z^{-\frac{1}{2}}dz = \frac{1}{5}\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{5x^3+1} + C$$

2°) Calcular $I_2 = \int \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx$.

Haciendo la sustitución $\operatorname{sen} x = z$ resulta $\cos x\, dx = dz$,

$$I_2 = \int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx = \int z^2\, dz = \frac{1}{3} z^3 + C = \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x + C$$

3º) Calcular $I_3 = \int \operatorname{tg} 2x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}\, dx$

Haciendo la sustitución $\cos 2x = z$ resulta, diferenciando, $-2 \operatorname{sen} 2x\, dx = dz$, o sea, $\operatorname{sen} 2x\, dx = -\frac{1}{2} dz$

$$I_3 = \int \operatorname{tg} 2x\, dx = \int \frac{-\frac{1}{2} dz}{z} = -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = -\frac{1}{2} \ln z + C = -\frac{1}{2} \ln (\cos 2x) + C$$

4º) Calcular $I_4 = \int e^{-\frac{x}{a}}\, dx$

Haciendo la sustitución $-\frac{x}{a} = z$ resulta, diferenciando, $dx = -a\, dz$

$$I_4 = \int e^{-\frac{x}{a}}\, dx = -a \int e^z\, dz = -a e^z + C = -a e^{-\frac{x}{a}} + C$$

5º) Calcular $I_5 = \int \operatorname{sen} x \cdot \cos x\, dx$

Se puede proceder en varias formas

a) Haciendo $\operatorname{sen} x = z$ resulta $\cos x\, dx = dz$ e

$$I_5 = \int z\, dz = \frac{1}{2} z^2 + C_1 = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x + C_1$$

b) Haciendo $\cos x = t$ resulta $-\operatorname{sen} x\, dx = dt$ e

$$I_5 = -\int t\, dt = -\frac{1}{2} t^2 + C_2 = -\frac{1}{2} \cos^2 x + C_2.$$

c) Por ser $\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$ resulta

$$I_5 = \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} 2x\, dx,$$

y haciendo $2x = u$ se tiene

$$I_5 = -\frac{1}{4} \cos 2x + C_3$$

Verifíquese que los 3 resultados hallados difieren en una constante

6º) Calcular $I_6 = \int \operatorname{Th}^2 2x\, dx$

Teniendo en cuenta que es $\operatorname{Th}^2 u = \frac{\operatorname{Sh}^2 u}{\operatorname{Ch}^2 u} = \frac{\operatorname{Ch}^2 u - 1}{\operatorname{Ch}^2 u} = 1 - \frac{1}{\operatorname{Ch}^2 u}$ resulta, con $2x = u$

$$I_6 = \frac{1}{2} \int \operatorname{Th}^2 u\, du = \frac{1}{2} [u - \operatorname{Th} u] + C = \frac{1}{2} [2x - \operatorname{Th} 2x] + C =$$

$$= x - \frac{1}{2} \operatorname{Th} 2x + C.$$

EJERCICIOS:

Verificar las siguientes integrales.

1 $\int (x-1)^3\,dx = \frac{1}{4}(x-1)^4 + C.$

2. $\int \frac{1}{(2x-1)^2}\,dx = \frac{\frac{1}{2}}{1-2x} + C.$

3. $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x}}\,dx = -(3-2x)^{\frac{1}{2}} + C$

4. $\int \sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + C.$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{5+x}} = 2\sqrt{5+x} + C.$

6. $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z}} = -2(1-z)^{\frac{1}{2}} + C.$

7. $\int (a+bx)^n\,dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} + C.$

8. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{5-2x^2}} = -\frac{1}{3}(5-2x^2)^{\frac{3}{4}} + C$

9. $\int \frac{x^2+\frac{2}{3}}{\sqrt{x^3+2x}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+2x} + C$

(Hágase $x^3+2x=t$)

10 Calcular

$$\int \frac{x^3\,dx}{(1+x^2)^3}.$$

Solución: Haciendo la sustitución $1+x^2=z$ resulta $x^3\,dx = x^2\,(x\,dx) = x^2\cdot\frac{1}{2}d\,(1+x^2) = \frac{1}{2}(z-1)\,dz$ y la integral queda

$$\int \frac{x^3\,dx}{(1+x^2)^3} = \frac{1}{2}\int \frac{z-1}{z^3}\,dz = \frac{1}{2}\left[\int \frac{dz}{z^2} - \int \frac{dz}{z^3}\right] = -\frac{1}{2}\frac{1}{z} + \frac{1}{4}\frac{1}{z^2} + C =$$
$$= \frac{-2z+1}{4z^2} + C = -\frac{1+2x^2}{4(1+x^2)^2} + C$$

Verificar las siguientes integrales:

11 $\int ae^{ax}\,dx = e^{ax} + C.$

12 $\int e^{\frac{1}{2}x}\,dx = 2e^{\frac{1}{2}x} + C.$

13. $\int \frac{dx}{e^x} = -\frac{1}{e^x} + C.$

14. $\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} e^{x^3} + C.$

15. $\int \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) dx = a \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) + C.$

16. $\int a^{2x} dx = \frac{1}{2} \frac{a^{2x}}{\ln a} + C$

17. $\int \frac{dz}{2^{2z}} = -\frac{1}{2^{2z+1} \ln 2} + C.$

18. $\int \frac{e^{\sqrt{x}} + 1}{\sqrt{x}} dx = 2 \left(e^{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right) + C.$

19. $\int y \cdot a^{y^2} dy = \frac{a^{y^2}}{2 \ln a} + C.$

20 $\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln (ax + b) + C.$

21. $\int \frac{dx}{1 - x} = -\ln (1 - x) + C = \ln \frac{1}{1 - x} + C.$

22 $\int \frac{x^2}{1 - x} dx = -\frac{1}{2} x^2 - x - \ln (1 - x) + C$

(Efectúese la división indicada).

23. $\int \frac{x + 1}{(x - 1)^2} dx = \ln (x - 1) - \frac{2}{x - 1} + C.$

(Obsérvese que el numerador de la expresión subintegral se puede escribir $(x - 1) + 2$ y calcúlense las dos integrales que resultan).

24. Resolver

$$\int \frac{dx}{x (1 + x^n)}.$$

Solución:

$$\int \frac{dx}{x (1 + x^n)} = \int \frac{(1 + x^n) - x^n}{x (1 + x^n)} dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x^{n-1} dx}{1 + x^n} =$$

$$= \ln x - \frac{1}{n} \ln (1 + x^n) + C = \frac{1}{n} \ln \frac{x^n}{1 + x^n} + C.$$

25. Resolver la siguiente integral.

$$I = \int \frac{\ln x}{x} dx.$$

Solución:

$$I = \int \ln x \cdot d (\ln x) = \int z\, dz = \frac{1}{2} z^2 + C = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C.$$

Verificar las siguientes integrales

26 $\int (\cos 2x + \cos x)\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x + C$

27 $\int \operatorname{sen}(4x - 7)\, dx = -\frac{1}{4}\cos(4x - 7) + C$

28 $\int \sec^2 \frac{1}{2} x\, dx = 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} x + C$

29. $\int \sec(3x - 2) \operatorname{tg}(3x - 2)\, dx = \frac{1}{3}\sec(3x - 2) + C.$

30 $\int \operatorname{cotg} \frac{x}{5} \operatorname{cosec} \frac{x}{5}\, dx = -5 \operatorname{cosec} \frac{x}{5} + C.$

31 $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 2x} = -\frac{1}{2}\operatorname{cotg} 2x + C$

32 $\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{1 + 2\cos x} = -\frac{1}{2}\ln(1 + 2\cos x) + C.$

33 $\int \operatorname{sen} x \cdot \cos^3 x\, dx = -\frac{1}{4}\cos^4 x + C$

34 $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^4 x}\, dx = \frac{1}{3}\sec^3 x + C$

35 $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\, dx = -\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2 x + C$

36 $\int \left(\operatorname{cotg} 3x + \operatorname{tg}\frac{1}{3}x\right) dx = \frac{1}{3}\ln(\operatorname{sen} 3x) - 3\ln\left(\cos\frac{1}{3}x\right) + C$

37 Calcular

$$\int \operatorname{cotg}^2 x\, dx$$

Solución:

$$\operatorname{cotg}^2 x = \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - 1 = \operatorname{cosec}^2 x - 1$$

$$\int \operatorname{cotg}^2 x\, dx = \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx - \int dx = -\operatorname{cotg} x - x + C$$

Análogamente resulta

38 $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \operatorname{tg} x - x + C$

Verificar las siguientes integrales

39. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} = -2\operatorname{cotg} 2x + C.$

(Téngase en cuenta que $\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$)

40 $\int \frac{dx}{1 - \cos x} = -(\operatorname{cotg} x + \operatorname{cosec} x) + C = -\operatorname{cotg}\frac{1}{2}x + C$

(Multiplíquese numerador y denominador por $1 + \cos x$)

41. Calcular

$$I = \int (\operatorname{tg} 3x - 3)^2\, dx.$$

Solución. Desarrollando el cuadrado resulta

$$I = \int \operatorname{tg}^2 3x\, dx - 6\int \operatorname{tg} 3x\, dx + 9\int dx = I_1 - 6I_2 + 9I_3$$

$$I_1 = \int (\sec^2 3x - 1)\, dx = \frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x - x + C_1.$$

$$I_2 = -\frac{1}{3}\ln(\cos 3x) + C_2$$

$$I_3 = x + C_3$$

$$I = \frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x + 2\ln(\cos 3x) + 8x + C.$$

42 Calcular

$$\int \sec^4 x\, dx$$

Solución·

$$\int \sec^4 x\, dx = \int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x}\, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x}\, dx + \int \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \int \operatorname{tg}^2 x \cdot d(\operatorname{tg} x) + \int d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + C.$$

43. Calcular

$$\int \operatorname{tg}^3 x\, dx$$

Solucion

$$\int \operatorname{tg}^3 x\, dx = \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg} x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\operatorname{tg} x\, dx =$$

$$= \int \sec^2 x \cdot \operatorname{tg} x\, dx - \int \operatorname{tg} x\, dx =$$

$$= \int \operatorname{tg} x \cdot d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg} x\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln(\cos x) + C$$

(En la pág. 332 damos un procedimiento más directo y general para resolver este ejercicio).

Verificar las siguientes integrales

44 $\int \operatorname{Sh}\frac{1}{3}x\, dx = 3\operatorname{Ch}\frac{1}{3}x + C.$

45. $\int x\operatorname{Ch}(x^2+1)\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{Sh}(x^2+1) + C.$

46 $\int \operatorname{Th} x\, dx = \ln(\operatorname{Ch} x) + C.$

47 $\int \mathrm{Cth}\, \frac{1}{2} x\, dx = 2 \ln\, (\mathrm{Sh}\, \frac{1}{2} x) + C$

48 $\int (\mathrm{Sh}\, x + \mathrm{Ch}\, x)^3\, dx = \frac{1}{3} (\mathrm{Sh}\, 3x + \mathrm{Ch}\, 3x) + C$

49. $\int \mathrm{Sh}\, x \cdot \mathrm{Ch}\, x\, dx = \frac{1}{2} \mathrm{Sh}^2\, x + C.$

50 $\int \mathrm{Cth}^2\, x\, dx = x - \mathrm{Cth}\, x + C$

51 $\int \frac{dx}{\mathrm{Sh}^2\, x \cdot \mathrm{Ch}^2\, x} = -2\, \mathrm{Cth}\, 2x + C.$

52 $\int \mathrm{Sh}^3\, x\, dx = \frac{1}{3} \mathrm{Ch}^3\, x - \mathrm{Ch}\, x + C$

53 $\int \mathrm{Sech}^4\, \frac{1}{2} x\, dx = 2\, \mathrm{Th}\, \frac{1}{2} x \left(1 - \frac{1}{3}\, \mathrm{Th}^2\, \frac{1}{2} x \right) + C$

Calcular las siguientes integrales (1)

1 $\int \sqrt{3 + 4x}\, dx.$

2 $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 4x}}$

3. $\int \frac{dx}{(5 - 2x)^2}$

4 $\int x\, (1 - 2x^2)^9\, dx$

5 $\int \frac{x - 3}{\sqrt{6x - x^2}}\, dx.$

6. $\int \frac{x^3}{(a + bx^2)^3}\, dx$

7 $\int a^2\, e^{ax}\, dx$

8. $\int \frac{e^x + 1}{e^x}\, dx$

9. $\int \frac{n}{a^{nx}}\, dx.$

10 $\int (e^{n\theta})^2\, d\theta$

11. $\int \frac{e^{nx}\, dx}{\sqrt{1 - e^{nx}}}$

12 $\int \frac{5x^4 + 1}{x^5 + x}\, dx$

13. $\int \frac{x - 3}{6x - x^2}\, dx.$

14 $\int \frac{z\, dz}{7 - 2z^2}.$

15 $\int \frac{x^2\, dx}{3 + 2x^3}.$

16. $\int \frac{1 - 2x}{3 + x}\, dx$

17 $\int \frac{1 + x}{1 - x} dx.$

18 $\int \frac{x^2 + 1}{x - 1}\, dx$

19 $\int \frac{2x^3 + x}{x^2 - 3}\, dx.$

20 $\int \frac{x^3}{1 + x^2}\, dx.$

21. $\int \frac{e^x}{1 - e^x}\, dx.$

22 $\int \frac{e^x}{1 + e^x}\, dx$

23 $\int \frac{\sec^2 x}{2 - \mathrm{tg}\, x}\, dx.$

24. $\int \frac{(a + \ln x)^2}{x}\, dx.$

---

(1) Los resultados se encuentran en las páginas 343-345

25. $\int (\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x)\,dx.$

26 $\int \sec^2 \frac{5}{2} x\,dx.$

27 $\int \operatorname{cosec}^2 (3x + 2)\,dx.$

28 $\int \sec^2 \frac{1}{3} x\,dx.$

29 $\int \operatorname{tg}^2 5x\,dx.$

30 $\int (\sec x - \operatorname{tg} x)^2\,dx$

31 $\int (1 - \operatorname{tg} x)^2\,dx$

32. $\int \cos 3x\,dx$

33 $\int \operatorname{cotg} x\,dx$

34 $\int y^3 \sec^2 y^4\,dy$

35 $\int \operatorname{cosec}^2 2x\,dx$

36 $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{3 - 4 \operatorname{tg} x}}\,dx$

37. $\int \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\cos n\alpha}\,d\alpha.$

38 $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1 - \cos x}}\,dx$

39 $\int \frac{1 + \operatorname{sen} x}{x - \cos x}\,dx$

40 $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 z}{\sqrt{1 - \operatorname{cotg} z}}\,dz$

41 $\int \frac{\operatorname{sen} nx\,dx}{2 + \cos nx}.$

42 $\int (\operatorname{cotg} x - 1)^2\,dx$

43 $\int \sec 2x \cdot \operatorname{tg} 2x\,dx$

44 $\int e^x \operatorname{tg} (e^x)\,dx$

45 $\int \frac{d\theta}{\operatorname{cotg} 3\theta}$

46 $\int \frac{\sec x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx$

$\left(\text{Llévese la expresión subintegral a la forma } \frac{\sec^2 x}{1 + \operatorname{tg} x}\right).$

47 $\int (\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x)^2\,dx$

48 $\int \frac{e^x + \sec^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg} x + e^x}}\,dx$

49. $\int \frac{\sec nx \cdot \operatorname{tg} nx}{a \sec nx - b}\,dx$

50 $\int 4 \operatorname{cotg}^4 2x \cdot \operatorname{cosec}^2 2x\,dx$

51. $\int \frac{\sec^2 2\alpha}{\sqrt{1 + 2 \operatorname{tg} 2\alpha}}\,d\alpha$

52 $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x}.$

(Multiplíquese numerador y denominador por $1 - \operatorname{sen} x$)

53 $\int \cos^3 x\,dx.$

[Téngase en cuenta que es $\cos^3 x = \cos x \cdot \cos^2 x = \cos x\,(1 - \operatorname{sen}^2 x)$]

54 $\int \operatorname{sen}^3 \frac{1}{2} x\,dx.$

55 $\int \sec^4 \frac{1}{2} x\,dx.$

56 $\int \operatorname{cotg}^3 x\,dx.$

57 $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx.$

[Recuérdese que $\operatorname{tg}^5 x = \operatorname{tg}^3 x\,(\sec^2 x - 1) = \operatorname{tg}^3 x \cdot \sec^2 x - \operatorname{tg} x \cdot \sec^2 x + \operatorname{tg} x$].

58. $\int \operatorname{tg}^3 x \cdot \sec x\, dx.$

[Téngase en cuenta que es $\operatorname{tg}^3 x \cdot \sec x = \operatorname{tg} x\,(\sec^2 x - 1)\sec x$].

59 $\int \operatorname{cotg}^4 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x\, dx.$ 60. $\int \operatorname{cotg}^4 x \cdot \operatorname{cosec}^4 x\, dx.$

(Obsérvese que es $\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$).

61 $\int \operatorname{Ch}(ax + b)\, dx.$ 62. $\int \operatorname{Sech}^2 (1 - x)\, dx.$

63 $\int \operatorname{Cosech}^2 (2x + 1)\, dx.$ 64. $\int \operatorname{Sech} 2x \operatorname{Th} 2x\, dx.$

65 $\int \operatorname{Cosech} nx \operatorname{Cotgh} nx\, dx$ 66. $\int \operatorname{sen} n\alpha \cdot \cos n\alpha\, d\alpha$

67 $\int \operatorname{sen} n\alpha \cdot \cos^2 n\alpha\, d\alpha.$ 68. $\int \operatorname{Sh} 2x \cdot \operatorname{Ch}^2 2x\, dx.$

69 $\int \frac{\operatorname{Ch} x}{1 + \operatorname{Sh} x}\, dx.$ 70 $\int \operatorname{Sech}^2 3x\, e^{\operatorname{Th} 3x}\, dx.$

4. INTEGRACION DE EXPRESIONES DE LA FORMA $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$.

Veremos cómo, mediante las fórmulas

$$\text{(XIII)} \quad \int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C,$$

$$\text{(XIV)} \quad \int \frac{dx}{1 - x^2} = \operatorname{Arg\,Th} x + C = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} + C,$$

se puede integrar cualquier expresión en la que aparezca como cantidad subintegral la unidad dividida por un trinomio de 2° grado.

Empecemos por algunos casos particulares.

1°) Sea integrar $I_1 = \int \frac{dx}{a^2 + b^2x^2}$.

El denominador se puede escribir $a^2 + b^2x^2 = a^2\left[1 + \frac{b^2}{a^2}x^2\right] =$

$$= a^2\left[1 + \left(\frac{b}{a}x\right)^2\right].$$

Haciendo la sustitución $\frac{b}{a}x = z$, o sea, $x = \frac{a}{b}z$ y $dx = \frac{a}{b}dz$, resulta

$$I_1 = \frac{a}{b}\int \frac{dz}{a^2(1 + z^2)} = \frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tg} z + C = \frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}x + C.$$

2°) Calcular $I_2 = \int \frac{dx}{a^2 - b^2x^2}$.

El denominador se puede escribir $a^2 - b^2x^2 = a^2\left[1 - \frac{b^2}{a^2}x^2\right] =$

$= a^2\left[1 - \left(\frac{b}{a}x\right)^2\right]$.

Haciendo la sustitución $\frac{b}{a}x = z$, o sea, $x = \frac{a}{b}z$ y $dx = \frac{a}{b}dz$.
resulta

$$I_2 = \frac{a}{b}\int \frac{dz}{a^2(1 - z^2)} = \frac{1}{ab}\operatorname{Arg\,Th} z + C = \frac{1}{2}\frac{1}{ab}\ln\frac{1+z}{1-z} + C,$$

y escribiendo estas expresiones en función de x resulta

$$I_2 = \frac{1}{ab}\operatorname{Arg\,Th}\frac{b}{a}x + C = \frac{1}{2ab}\ \ln\frac{a+bx}{a-bx} + C.$$

3º) El caso en el cual aparece en el denominador un trinomio completo de 2º grado siempre se puede llevar a los anteriores recordando la relación

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{1}{2}\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{1}{4}\frac{b^2}{a^2}\right]$$

que se puede escribir en la forma $a_1^2 \pm b_1^2z^2$, con $z = x + \frac{1}{2}\frac{b}{a}$
y a_1 y b_1 determinados por los coeficientes a, b y c.
Mejor que recordar fórmulas generales para este caso es adiestrarse para llevar cualquier trinomio a los casos 1º) y 2º).

Veamos algunos ejemplos

$$I_3 = \int\frac{dx}{x^2 + 4x + 13}.$$

El trinomio se puede escribir

$x^2 + 4x + 13 = (x+2)^2 + 13 - 2^2 = (x+2)^2 + 9 = (x+2)^2 + 3^2$.

Con la sustitución $x + 2 = z$ y $dx = dz$ resulta, de acuerdo a I_1,

$$I_3 = \int\frac{dz}{z^2 + 3^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}z + C = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}(x+2) + C.$$

Calcular

$$I_4 = \int\frac{dx}{2x^2 - 4x - 6}.$$

El denominador se puede escribir, en este caso,

$$2x^2 - 4x - 6 = 2(x^2 - 2x - 3) = 2[(x-1)^2 - 3 - 1] = 2[(x-1)^2 - 2^2].$$

Haciendo $x - 1 = z$ y $dx = dz$ se tiene, de acuerdo a I_2,

$$I_4 = \frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2 - 2^2} = -\frac{1}{2}\int\frac{dz}{2^2 - z^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{Arg\,Th}\frac{1}{2}z + C = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\ln\frac{2+z}{2-z} + C.$$

Pasando a la variable x resulta, finalmente.

$$I_4 = -\frac{1}{4}\operatorname{Arg}\operatorname{Th}\frac{1}{2}(x-1) + C = -\frac{1}{8}\ln\frac{1+x}{3-x} + C$$

EJERCICIOS

Verificar las siguientes integrales

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{25+9x^2} = \frac{1}{15}\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{5}x + C$

2. $\displaystyle\int\frac{1+x}{1+x^2}dx = \operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

3. $\displaystyle\int\frac{1-x}{1+4x^2}dx = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} 2x - \frac{1}{8}\ln(1+4x^2) + C$

4. $\displaystyle\int\frac{1+x^2}{1-x^2}dx = 2\operatorname{Arg}\operatorname{Th} x - x + C = \ln\frac{1+x}{1-x} - x + C$

(Efectúese la división indicada)

5. $\displaystyle\int\frac{1-x^2}{1+x^2}dx = 2\operatorname{arc\,tg} x - x + C$

6. Resolver la integral

$$\int\frac{dx}{1-2x+2x^2}$$

Solución Podemos escribir

$1 - 2x + 2x^2 = 2[x^2 - x + \frac{1}{2}] = 2[(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}]$.

La integral resulta

$$\int\frac{dx}{2[(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}]} = \frac{1}{2}\int\frac{d(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}} = \operatorname{arc\,tg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= \operatorname{arc\,tg}(2x-1) + C$$

Verificar las integrales

7. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+2x+10} = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}(x+1) + C.$

8. $\displaystyle\int\frac{dx}{1+x+x^2} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$

9. **Calcular la integral**

$$\int\frac{x+1}{x^2-2x+5}dx.$$

Solución: **En general, una integral del tipo $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$ se puede calcular en base a los resultados anteriores. Habrá que descomponerla en dos expresiones con el denominador dado de modo que en una de ellas el numerador sea el binomio $2ax+b$ (que es precisamente la derivada del denominador) y en la otra expresión el numerador sea un coeficiente numérico En esta forma se logra hacer el cálculo empleando *logaritmos* y *arcos tangentes*. Veamos cómo se procede en este caso concreto.**

$$\int \frac{x+1}{x^2-2x+5}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2)+2}{x^2-2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}\,dx +$$

$$+ 2\int \frac{dx}{(x-1)^2+4} = \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5) + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}(x-1) + C.$$

10 Calcular

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\,dx$$

Solución Una integral del tipo $\int \frac{P(x)}{ax^2+bx+c}\,dx$, donde $P(x)$ es un polinomio de grado $\geqslant 2$, siempre se puede resolver haciendo primero la división, como lo muestra este ejemplo

$$\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = 1 + \frac{2x}{x^2-x+1} = 1 + \frac{(2x-1)+1}{x^2-x+1}.$$

La integral resulta

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\,dx = x + \ln(x^2-x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

Calcular las siguientes integrales (1)

1. $\int \frac{dx}{x^2+25}$.
2. $\int \frac{dx}{9x^2+4}$.
3. $\int \frac{dx}{3x^2+5}$.
4. $\int \frac{dx}{4x^2+9}$.
5. $\int \frac{dx}{2+3x^2}$.
6. $\int \frac{4x^3\,dx}{9+x^8}$.
7. $\int \frac{dx}{a^2+(x+b)^2}$.
8. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$. (Sustitúyase $e^x = z$)
9. $\int \frac{dx}{3x^2-2x+2}$.
10. $\int \frac{dx}{8x-x^2-7}$.
11. $\int \frac{dx}{3x-x^2-2}$.
12. $\int \frac{dx}{x^2+2x+17}$.
13. $\int \frac{dx}{x^2-x-1}$.
14. $\int \frac{dx}{4x^2-12x+10}$.
15. $\int \frac{dx}{2x-x^2-5}$
16. $\int \frac{dx}{x^2+4x+3}$.
17. $\int \frac{dx}{x^2+6x+8}$
18. $\int \frac{4x+10}{x^2+2x+5}\,dx$.
19. $\int \frac{8x-8}{4x^2-4x-3}\,dx$
20. $\int \frac{dx}{x^2+2x}$.
21. $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}\,dx$
22. $\int \frac{x+2}{4x-x^2}\,dx$.

(1) Los resultados se encuentran en las páginas 345-346.

23 $\int \frac{2x+5}{2x^2+2x+1}\,dx$ 24 $\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}\,dx.$

5. INTEGRACION DE EXPRESIONES DE LA FORMA $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Hemos indicado en la tabla de integrales las fórmulas inmediatas:

$$\text{(XV)} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sen}\, x + C.$$

$$\text{(XVI)} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \text{Arg Sh}\, x + C = \ln\,(x+\sqrt{x^2+1}) + C.$$

$$\text{(XVII)} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \text{Arg Ch}\, x + C = \ln\,(x+\sqrt{x^2-1}) + C.$$

Veremos ahora cómo se conduce a estas fórmulas cualquier caso donde se presenta como expresión subintegral la unidad dividida por la raíz cuadrada de un trinomio de 2° grado

1°) Sea calcular $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Por ser $a^2 - x^2 = a^2\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$, con la sustitución $\frac{x}{a} = z$, resulta $dx = a\,dz$ e

$$I_1 = \int \frac{a\,dz}{\sqrt{a^2-a^2z^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \text{arc sen}\, z + C = \text{arc sen}\, \frac{x}{a} + C$$

2°) Sea calcular $I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$.

Escribiendo $x^2 \pm a^2 = a^2\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1\right]$, con la sustitución $\frac{x}{a} = z$, resulta $dx = a\,dz$ e

$$I_2 = \int \frac{a\,dz}{\sqrt{a^2\,(z^2 \pm 1)}} = \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 \pm 1}} = \ln\,(z + \sqrt{z^2 \pm 1}) + C =$$
$$= \ln\,(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C,$$

habiendo incluído el término $-\ln a$ en la constante de integración.

3°) Cuando se trata de un trinomio $ax^2 + bx + c$ siempre se podrá llevar a la forma $a\,(x+\alpha)^2 \pm \beta^2$ y, según sea el signo de a y el signo que antecede a β^2, se podrá llevar a una de las fórmulas (XV) a (XVII). tal como lo muestran los siguientes ejemplos:

Sea calcular $I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}$.

El trinomio se puede escribir

$$4x - x^2 - 3 = -3 - (x-2)^2 + 4 = 1 - (x-2)^2$$

Haciendo $x - 2 = z$ y $dx = dz$ resulta

$$I_3 = \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \text{arc sen } z + C = \text{arc sen } (x - 2) + C$$

Sea ahora calcular $I_4 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 25}}$.

Hacemos las siguientes transformaciones $x^2 - 6x + 25 = (x-3)^2 + 25 - 9 = 4^2 \left[\frac{1}{4^2}(x-3)^2 + 1 \right]$ Sustituyendo $x - 3 = 4z$ y $dx = 4dz$ resulta

$$I_4 = \int \frac{4\,dz}{4\sqrt{z^2+1}} = \text{Arg Sh } z + C = \ln (z + \sqrt{z^2+1}) + C =$$

$$= \text{Arg Sh} \frac{1}{4}(x-3) + C = \ln \left[\frac{1}{4}(x-3) + \frac{1}{4}\sqrt{x^2 - 6x + 25} \right] + C =$$

$$= \ln (x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 25}) + C'$$

Por último, consideremos $I_5 = \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 3x + \frac{1}{2}}}$.

Hacemos las siguientes transformaciones $3x^2 + 3x + \frac{1}{2} = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{3}{12}\left[12\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1\right] = \frac{1}{4}\left[4 \cdot 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1\right]$ y con la sustitución $2\sqrt{3}\left(x + \frac{1}{2}\right) = z$ y $2\sqrt{3}\,dx = dz$ resulta

$$I_5 = \int \frac{dz}{2\sqrt{3}\frac{1}{2}\sqrt{z^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Arg Ch } z + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln (z + \sqrt{z^2 - 1}) + C.$$

Volviendo a la variable x se tiene

$$I_5 = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Arg Ch} \sqrt{3}\,(2x + 1) + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left[2\sqrt{3}\left(x + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{12\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1} \right] + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left[\sqrt{3}\left(x + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{3x^2 + 3x + \frac{1}{2}} \right] + C'.$$

EJERCICIOS·

Verificar las siguientes integrales

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{12x - 9x^2}} = \frac{1}{3} \text{arc sen} \frac{1}{2}(3x - 2) + C$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}} = \frac{1}{b} \text{arc sen} \frac{bx}{a} + C$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \text{arc sen}\left(\frac{x}{a} - 1\right) + C$

4. $\int \frac{dz}{\sqrt{6z - z^2 - 8}} = \text{arc sen}\,(z - 3) + C.$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{-9x^2 - 30x - 21}} = \frac{1}{3}\,\text{arc sen}\,\frac{1}{2}\,(3x + 5) + C$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 9}} = \frac{1}{2}\,\text{Arg Sh}\,\frac{2}{3}x + C = \frac{1}{2}\ln\,(2x + \sqrt{4x^2 + 9}) + C'$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 20x}} = \text{Arg Ch}\left(\frac{x + 10}{10}\right) + C = \ln\,(x + 10 + \sqrt{x^2 + 20x}) + C'.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 25}} = \text{Arg Sh}\,\frac{1}{4}(x - 3) + C =$

$$= \ln\left[(x - 3) + \sqrt{x^2 - 6x + 25}\right] + C'$$

Calcular las siguientes integrales (1)

1 $\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}$.

2 $\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x - 1)^2}}$.

4. $\int \frac{x + 1}{\sqrt{2x - x^2}}\,dx$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x^2}}$.

6 $\int \frac{dx}{\sqrt{x\,(1 - x)}}$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{7 - 6x - x^2}}$.

8 $\int \frac{dx}{\sqrt{5x - x^2}}$.

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 9}}$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x^2}}$.

11 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 8}}$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 2x + 3x^2}}$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 4x - 3}}$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 4x + 5}}$.

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

16. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}$.

17. $\int \frac{4x - 1}{\sqrt{4 - x^2}}\,dx.$

18 $\int \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}\,dx$

19. $\int \frac{x + 1}{\sqrt{2x^2 - 6x + 4}}\,dx$

20. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}$.

21. $\int \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 2x}}\,dx$

22. $\int \frac{2x - 1}{\sqrt{4x^2 + 4x + 2}}\,dx.$

---

(1) Los resultados se encuentran en las páginas 346-347.

23. $\displaystyle\int \frac{1 - x}{\sqrt{1 + 4x^2}}\,dx.$ 24 $\displaystyle\int \frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 - 1}}\,dx.$

25 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}}$

ALGUNAS INTEGRALES IMPORTANTES Porque aparecen con frecuencia en las aplicaciones del cálculo integral, es útil tratar especialmente algunas integrales cuyo resultado convendrá retener de memoria.

1°)
$$I_1 = \int \operatorname{sen}^2 x\,dx.$$

Basta recordar la fórmula trigonométrica $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ y resulta

$$I_1 = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right] + C =$$
$$= \frac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x \cdot \cos x) + C.$$

2°)
$$I_2 = \int \cos^2 x\,dx.$$

Análogamente al caso anterior, por ser $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ resulta

$$I_2 = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right] + C =$$
$$= \frac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x \cdot \cos x) + C.$$

3°)
$$I_3 = \int \operatorname{Sh}^2 x\,dx$$

Por ser $\operatorname{Sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{Ch} 2x - 1)$ resulta

$$I_3 = \frac{1}{2}\int (\operatorname{Ch} 2x - 1)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\operatorname{Sh} 2x - x\right] + C =$$
$$= \frac{1}{2}(\operatorname{Sh} x \cdot \operatorname{Ch} x - x) + C.$$

4°)
$$I_4 = \int \operatorname{Ch}^2 x\,dx.$$

Por ser $\operatorname{Ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{Ch} 2x + 1)$ resulta

$$I_4 = \frac{1}{2}\int (\text{Ch}\, 2x + 1)\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\text{Sh}\, 2x + x\right] + C =$$
$$= \frac{1}{2}(\text{Sh}\, x \cdot \text{Ch}\, x + x) + C.$$

5º) $$I_5 = \int \frac{dx}{\text{sen}\, x} = \int \text{cosec}\, x\, dx.$$

Recordando que $\text{sen}\, x = 2\, \text{sen}\frac{1}{2}x \cos\frac{1}{2}x$ y multiplicando numerador y denominador por $\cos\frac{1}{2}x$ queda

$$\frac{1}{\text{sen}\, x} = \frac{1}{2\, \text{sen}\frac{1}{2}x \cos\frac{1}{2}x} \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2\, \text{tg}\frac{1}{2}x \cos^2\frac{1}{2}x}.$$

Haciendo la sustitución $\text{tg}\frac{1}{2}x = z$ y diferenciando se obtiene

$$\frac{1}{2}\frac{dx}{\cos^2\frac{1}{2}x} = dz, \text{ o sea, } \frac{dx}{\cos^2\frac{1}{2}x} = 2dz.$$

$$I_5 = \int \frac{dx}{\text{sen}\, x} = \int \frac{2dz}{2z} = \int \frac{dz}{z} = \ln z + C = \ln\left(\text{tg}\frac{1}{2}x\right) + C.$$

6º) $$I_6 = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \sec x\, dx.$$

Haciendo $x = \frac{1}{2}\pi - z$ y $dx = -dz$ resulta, en base a la integral anterior,

$$I_6 = \int \frac{-dz}{\text{sen}\, z} = -\ln \text{tg}\frac{1}{2}z + C = -\ln \text{tg}\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right) + C.$$

Recordando que en 2 ángulos complementarios α y $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ es $\text{tg}\, \alpha = \text{cotg}\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = 1 : \text{tg}\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right)$, tomando logaritmos resulta $\ln \text{tg}\, \alpha = -\ln \text{tg}\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right)$.

Como $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x$ tiene como complemento a $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x$, se tiene finalmente

$$I_6 = \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right) + C.$$

Obsérvese que a este mismo resultado se llega procediendo de la siguiente manera

$$\int \sec x\, dx = \int \sec x \frac{\sec x + \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x}\, dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \cdot \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x}\, dx =$$

$$= \int \frac{d\,(\sec x + \operatorname{tg} x)}{\sec x + \operatorname{tg} x} = \ln\,(\sec x + \operatorname{tg} x) + C = \ln \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} + C =$$

$$= \ln \frac{\left(1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} x\right)^2}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} x} + C = \ln \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} x}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} x} + C =$$

$$= \ln \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right) + C = \operatorname{Arg\,Sh}\,(\operatorname{tg} x) + C.$$

Esta integral es precisamente el gudermaniano inverso $gd^{-1}\,x$ función definida en la página 94

EJERCICIOS

1 Resolver

$$\int \cos^4 x \ \operatorname{sen}^2 x\, dx$$

Solución. Recordando que $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x$ se tiene, por consiguiente, $\operatorname{sen}^2 2x = 4 \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x$ Además, $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$, con lo que resulta

$$\cos^4 x \ \operatorname{sen}^2 x = (\cos^2 x \cdot \operatorname{sen}^2 x)\cos^2 x = \frac{1}{8}\operatorname{sen}^2 2x\,(1 + \cos 2x)$$

La integral queda, entonces,

$$\int \cos^4 x \ \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x\, dx + \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int (1 - \cos 4x)\, dx + \frac{1}{16}\int \operatorname{sen}^2 2x\, d\,(\operatorname{sen} 2x) =$$

$$= \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 2x\right) + C$$

2 Resolver

$$\int (\sec x + \operatorname{tg} x)\, dx$$

Solución Puede procederse con cada función por separado y recordar los resultados hallados anteriormente, pero transformando la expresión subintegral se llega más rápidamente a la solución, pues

$$\sec x + \operatorname{tg} x = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x\,(1 - \operatorname{sen} x)} = \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x},$$

y la integral resulta

$$\int (\sec x + \operatorname{tg} x)\, dx = \int \frac{\cos x\, dx}{1 - \operatorname{sen} x} = -\int \frac{d\,(1 - \operatorname{sen} x)}{1 - \operatorname{sen} x} =$$
$$= -\ln (1 - \operatorname{sen} x) + C$$

Verificar las siguientes integrales

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{Sh} x} = \ln \operatorname{Th} \frac{1}{2} x + C.$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{Ch} x} = \operatorname{arc\,tg} (\operatorname{Sh} x) + C.$

(Hágase $\operatorname{Sh} x = z$).

5. $\displaystyle\int \cos^6 x\, dx = \frac{5}{16} x + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{3}{64} \operatorname{sen} 4x - \frac{1}{48} \operatorname{sen}^3 2x + C.$

6 Resolver

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x}.$$

Solución:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x} = 2 \int \frac{dx}{\operatorname{sen} 2x} + \int \frac{d\,(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen}^3 x} =$$
$$= \ln (\operatorname{tg} 2x) - \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 x + C.$$

Calcular las siguientes integrales

1. $\displaystyle\int (1 + \operatorname{cosec} x)^2\, dx.$ R $\displaystyle x + 2 \ln \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} x\right) - \operatorname{cotg} x + C.$

2. $\displaystyle\int \left(\sec \frac{1}{2} x + \operatorname{cosec} 2x\right) dx$ R. $\displaystyle 2 \ln \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} x + \sec \frac{1}{2} x\right) + \frac{1}{2} \ln (\operatorname{tg} x) + C$

3. $\displaystyle\int \sec^3 x\, dx.$ R $\displaystyle \frac{1}{2} \operatorname{sen} x \cdot \sec^2 x + \frac{1}{2} \ln (\sec x + \operatorname{tg} x) + C$

4. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 \frac{x}{5} \cos^4 \frac{x}{5}\, dx.$ R $\displaystyle \frac{1}{16} x - \frac{5}{64} \operatorname{sen} \frac{4}{5} x + \frac{5}{48} \operatorname{sen}^3 \frac{2}{5} x + C.$

5. $\displaystyle\int \operatorname{Th}^4 2x\, dx.$ R $\displaystyle x - \frac{1}{2} \operatorname{Th} 2x - \frac{1}{6} \operatorname{Th}^3 2x + C$

6. INTEGRACION DE EXPRESIONES DE LA FORMA $\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx$

Empezaremos por tratar los 3 casos particulares siguientes:

1º) Sea calcular $I_1 = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$

El radical tendrá valores reales si es $x^2 \leqslant a^2$, es decir, si $-a \leqslant x \leqslant +a$, lo cual indica que convendrá hacer la sustitución

$$x = a \operatorname{sen} t.$$

En efecto, como $\operatorname{sen} t$ varía entre -1 y $+1$, x variará entre $-a$ y $+a$.

Resulta entonces $dx = a \cos t\, dt$ e

$$I_1 = \int \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 t}\, a \cos t\, dt = a^2 \int \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \cos t\, dt =$$
$$= a^2 \int \cos^2 t\, dt.$$

Esta integral ha sido calculada en la página 296; se obtiene entonces

$$I_1 = \frac{1}{2} a^2 (t + \operatorname{sen} t \cdot \cos t) + C.$$

Volviendo a la variable x, por ser $\cos t = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ y $t = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a}$ resulta

$$I_1 = \frac{1}{2}\left(a^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2}\right) + C.$$

2°) Sea calcular $I_2 = \int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx$.

En este caso el radical es real cualquiera sea x. Por consiguiente, haremos la sustitución

$$x = a \operatorname{Sh} t,$$

dado que $\operatorname{Sh} t$ varía de $-\infty$ a $+\infty$. Entonces, $dx = a \operatorname{Ch} t\, dt$ e

$$I_2 = \int \sqrt{a^2 \operatorname{Sh}^2 t + a^2}\, a \operatorname{Ch} t\, dt = a^2 \int \sqrt{\operatorname{Sh}^2 t + 1} \operatorname{Ch} t\, dt = a^2 \int \operatorname{Ch}^2 t\, dt.$$

Puesto que en la página 296 hemos hallado

$$\int \operatorname{Ch}^2 t\, dt = \frac{1}{2}(t + \operatorname{Sh} t \cdot \operatorname{Ch} t) + C,$$

y es $t = \operatorname{Arg\,Sh} \frac{x}{a}$ y $\operatorname{Ch} t = \sqrt{1 + \operatorname{Sh}^2 t} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + x^2}$, resulta

$$I_2 = \frac{1}{2} a^2 (t + \operatorname{Sh} t \;\; \operatorname{Ch} t) + C = \frac{1}{2}\left(a^2 \operatorname{Arg\,Sh} \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 + x^2}\right) + C$$

Como $\operatorname{Arg\,Sh} \frac{x}{a}$ y $\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$ difieren en una constante (pág 93), también es

$$I_2 = \frac{1}{2}[a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + x\sqrt{a^2 + x^2}] + C.$$

NOTA

También es apropiada la sustitución $x = a \operatorname{tg} z$, pues la tangente varía de $-\infty$ a $+\infty$ Se llega entonces a $\int \sec^3 z\, dz$, cuya solucion hemos dado en el ejercicio 3 de la página anterior

3°) Finalmente, consideremos $I_3 = \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$.

Como debe ser $x^2 \geqslant a^2$ para que el radical sea real, haremos $x = a \operatorname{Ch} t$, pues la función $\operatorname{Ch} t$ sólo toma valores mayores que 1 Entonces es $dx = a \operatorname{Sh} t\, dt$ e

$$I_3 = \int \sqrt{a^2 \operatorname{Ch}^2 t - a^2}\, a \operatorname{Sh} t\, dt = a^2 \int \sqrt{\operatorname{Ch}^2 t - 1} \operatorname{Sh} t\, dt = a^2 \int \operatorname{Sh}^2 t\, dt,$$

y esta integral ha sido calculada anteriormente en la página 296:

$$\int \operatorname{Sh}^2 t\, dt = \frac{1}{2} (\operatorname{Sh} t \cdot \operatorname{Ch} t - t) + C$$

Como es $\operatorname{Sh} t = \sqrt{\operatorname{Ch}^2 t - 1} = \frac{1}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ y $t = \operatorname{Arg\,Ch} \frac{x}{a}$, resulta

$$I_3 = \frac{1}{2}\left(x \sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \operatorname{Arg\,Ch} \frac{x}{a} \right) + C,$$

que también puede escribirse, en base a las relaciones entre las funciones hiperbólicas inversas y el logaritmo (pág 93),

$$I_3 = \frac{1}{2} [x \sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \ln (x + \sqrt{x^2 - a^2})] + C$$

NOTA

Esta integral se puede calcular también con la sustitución $x = a \sec z$, pues la secante es siempre mayor que 1

Cualquier caso de trinomio completo de 2° grado se lleva a uno de los 3 precedentes, como lo muestran los siguientes ejemplos

Sea calcular $I_4 = \int \sqrt{8 - 4x - 4x^2}\, dx$

Como es $8 - 4x - 4x^2 = 9 - (2x + 1)^2$, haciendo $2x + 1 = z$ y $2\,dx = dz$ se tiene

$$I_4 = \frac{1}{2} \int \sqrt{9 - z^2}\, dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(9 \operatorname{arc\,sen} \frac{z}{3} + z \sqrt{9 - z^2} \right) + C,$$

y volviendo a la variable x resulta

$$I_4 = \frac{1}{4} \left[9 \operatorname{arc\,sen} \frac{2x + 1}{3} + (2x + 1) \sqrt{8 - 4x - 4x^2} \right] + C$$

Sea calcular $I_5 = \int \sqrt{x^2 - 2x + 2}\, dx$.

Por ser $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$, con $x - 1 = z$ y $dx = dz$, resulta

$$I_5 = \int \sqrt{z^2 + 1}\, dz = \frac{1}{2} (\operatorname{Arg\,Sh} z + z \sqrt{z^2 + 1}) + C =$$

$$= \frac{1}{2} [\ln (z + \sqrt{z^2 + 1}) + z \sqrt{z^2 + 1}] + C'$$

Reemplazando en estas fórmulas z por $x - 1$ se tiene la integral buscada.

Otro ejemplo es $I_6 = \int \sqrt{2x^2 + 20x + 46}\, dx$.

Como es $2x^2 + 20x + 46 = 2\,[(x+5)^2 - 2]$, haciendo $x + 5 = z$ y $dx = dz$ resulta

$$I_6 = \sqrt{2}\int \sqrt{z^2 - 2}\, dz = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left[z\sqrt{z^2-2} - 2 \operatorname{Arg Ch} \frac{z}{\sqrt{2}}\right] + C =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\,[z\sqrt{z^2-2} - 2\ln(z + \sqrt{z^2-2})] + C'.$$

Reemplazando z por $x + 5$ se tiene la integral buscada

EJERCICIOS

Verificar las siguientes integrales

1. $\int \sqrt{1 - 9x^2}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{1 - 9x^2} + \frac{1}{6} \operatorname{arc sen} 3x + C.$

2. $\int \sqrt{4x^2 - 9}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{4x^2 - 9} - \frac{9}{4} \operatorname{Arg Ch} \frac{2}{3} x + C.$

3. $\int \sqrt{25 + 9x^2}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{25 + 9x^2} + \frac{25}{6} \operatorname{Arg Sh} \frac{3}{5} x + C.$

4 $\int \sqrt{5 + 2x + x^2}\, dx = \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{5 + 2x + x^2} + 2 \operatorname{Arg Sh} \frac{1}{2}(x+1) + C$

Calcular las siguientes integrales (¹)

1 $\int \sqrt{9 - 4x^2}\, dx.$

2 $\int \sqrt{a^2 - b^2x^2}\, dx.$

3 $\int \sqrt{4 + 7x^2}\, dx$

4 $\int \sqrt{5 - 4x - x^2}\, dx$

5 $\int \sqrt{x^2 - 2x - 8}\, dx.$

6 $\int \sqrt{x^2 - 4x}\, dx$

7 $\int \sqrt{3 - 2x - x^2}\, dx.$

7. INTEGRACION POR PARTES

A partir de la fórmula de diferenciación de un producto de 2 funciones $u(x)$ y $v(x)$,

$$d\,(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du,$$

se obtiene, integrando ambos miembros,

$$\int d\,(u \cdot v) = \int u\, dv + \int v\, du,$$

o sea, incluyendo la constante que aparece en el primer miembro dentro de las constantes de las otras integrales,

(¹) Los resultados se encuentran en la página 347.

$$u \cdot v = \int u\,dv + \int v\,du,$$

es decir,

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du.$$

Esta fórmula permite llevar el cálculo de la integral del primer miembro al cálculo de la integral del segundo miembro. Si esta segunda integral se calcula más fácilmente, el procedimiento es útil; de lo contrario, debe desecharse.

EJEMPLOS

1°) $\int x \operatorname{sen} x\,dx$. Esta integral puede calcularse con la fórmula de integración por partes si se homologa a las funciones u y v en la siguiente forma

$$u = x, \qquad dv = \operatorname{sen} x\,dx,$$

con lo que resulta

$$du = dx, \qquad v = -\cos x$$

Entonces será

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = x\,(-\cos x) - \int -\cos x\,dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$$

2°) $\int xe^x\,dx$. Hagamos

$$u = x, \qquad dv = e^x\,dx,$$

con lo que resulta

$$du = dx, \qquad v = e^x.$$

La fórmula da entonces

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C = e^x\,(x-1) + C$$

OBSERVACIÓN.

También se podía haber atribuído a u y v las siguientes expresiones

$$u = e^x, \qquad dv = x\,dx,$$

con lo que habría resultado

$$du = e^x\,dx, \qquad v = \frac{1}{2}x^2,$$

y la aplicación de la fórmula daría

$$\int xe^x\,dx = \frac{1}{2}e^x x^2 - \int \frac{1}{2}x^2 e^x\,dx$$

Como esta última integral es más complicada que la integral dada, este camino debe desecharse

3°) $\int x^2 e^x\,dx$ Hagamos

$$u = x^2, \qquad dv = e^x\,dx,$$

con lo que resulta

$$du = 2x\,dx, \qquad v = e^x$$

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - \int 2e^x\ x\,dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\,dx$$

Esta última integral es precisamente la del ejemplo 2º) Reemplazándola por su valor resulta

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2e^x (x - 1) + C = e^x (x^2 - 2x + 2) + C$$

4º) $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$ Hagamos

$$u = \operatorname{sen} x, \qquad dv = e^x\,dx,$$

con lo que resulta

$$du = \cos x\,dx, \qquad v = e^x.$$

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\,dx \qquad [1]$$

Calculemos ahora, mediante la integracion por partes,

$$\int e^x \cos x\,dx$$

Haciendo

$$u = \cos x, \qquad dv = e^x\,dx,$$

se tiene

$$du = -\operatorname{sen} x\,dx, \qquad v = e^x,$$

y resulta

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

Reemplazando en [1] resulta, en definitiva,

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx + C$$

Pasando la integral del segundo miembro al primero y dividiendo luego por 2 se tiene

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$

Fórmulas de reducción La fórmula de integración por partes se aplica a veces para reducir el cálculo de una integral en la que figura un índice n, al cálculo de otra del mismo tipo con un índice menor.

Tal es el caso de $I_n = \int x^n e^x\,dx$, donde n es un número natural Para cada valor del exponente n se tiene la integral I_n correspondiente. En particular, si es $n = 0$, resulta $I_0 = \int e^x\,dx = e^x + C$

En general, haciendo $u = x^n$ y $dv = e^x\,dx$ resulta

$$du = nx^{n-1}\,dx, \quad v = e^x$$

y, en virtud de la fórmula de integración por partes, se tiene

$$I_n = x^n e^x - n \int e^x x^{n-1}\, dx = x^n e^x - n I_{n-1}$$

De acuerdo a la ley de recurrencia resulta, reemplazando n por $n - 1$,

$$I_{n-1} = x^{n-1} e^x - (n - 1)\, I_{n-2},$$

y así sucesivamente hasta llegar a I_0

Reuniendo todos los resultados se tiene

$$I_n = e^x\,[x^n - nx^{n-1} + n\,(n-1)\,x^{n-2} - n\,(n-1)\,(n-2)\,x^{n-3} + \\ + \quad + (-1)^n\, n!] + C.$$

EJERCICIOS

Verificar las siguientes integrales

1 $\int \ln x\, dx = x\,(\ln x - 1) + C$

2 $\int \text{arc sen}\, x\, dx = x \,\text{arc sen}\, x - \sqrt{1 - x^2} + C$

3 $\int \text{arc tg}\, x\, dx = x \,\text{arc tg}\, x - \frac{1}{2} \ln (1 + x^2) + C$

4 $\int \text{arc cos}\, x\, dx = x \,\text{arc cos}\, x - \sqrt{1 - x^2} + C$

5 $\int x\ e^{2x}\, dx = \frac{1}{4} e^{2x}\,(2x - 1) + C$

6 $\int x \,\text{Sh}\, x\, dx = x \,\text{Ch}\, x - \text{Sh}\, x + C$

7 $\int x \,\text{Ch}\, x\, dx = x \,\text{Sh}\, x - \text{Ch}\, x + C$

8 $\int \text{Arg Th}\, x\, dx = x \,\text{Arg Th}\, x + \frac{1}{2} \ln (1 - x^2) + C.$

9 $\int x \,\text{arc tg}\, x\, dx = \frac{1}{2} (1 + x^2)\, \text{arc tg}\, x - \frac{1}{2} x + C$

10 $\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2} e^x\, (\text{sen}\, x + \cos x) + C$

11 $\int x\ \cos x\, dx = x\ \text{sen}\, x + \cos x + C$

12 $\int x \cdot \ln x\, dx = \frac{1}{2} x^2 \left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C$

13 $\int x^m \ln x\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \left(\ln x - \frac{1}{m+1}\right) + C \quad [m \neq -1]$

14 $\int x\ e^{\frac{x}{a}}\, dx = a\,(x - a)\, e^{\frac{x}{a}} + C$

15. $\int x \cdot \arccos x \, dx = \frac{1}{2} \arccos x \, (x^2 - 1) - \frac{1}{4} \operatorname{arc\,sen} x - \frac{1}{4} x \sqrt{1 - x^2} + C.$

16. $\int x^3 \ln x \, dx = \frac{1}{4} x^4 \left(\ln x - \frac{1}{4} \right) + C$

17. $\int x \sec^2 x \, dx = x \operatorname{tg} x - \ln (\sec x) + C.$

18. $\int \ln (a^2 + x^2) \, dx = x \ln (x^2 + a^2) - 2x - 2a \operatorname{Arg\,Th} \frac{x}{a} + C$

19. $\int \operatorname{sen} (\ln x) \, dx = \frac{1}{2} x \, [\operatorname{sen} (\ln x) - \cos (\ln x)] + C.$

20. $\int \cos (\ln x) \, dx = \frac{1}{2} x \, [\operatorname{sen} (\ln x) + \cos (\ln x) + C.$

21. $\int \frac{x + \operatorname{sen} x}{1 + \cos x} \, dx = x \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} x + C$

(Téngase en cuenta que $\frac{x + \operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \frac{\frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} + \operatorname{tg} \frac{1}{2} x$ e intégrese por partes el primer sumando de la expresión).

22 Calcular la integral

$$I_n = \int \frac{dx}{(1 + x^2)^n}.$$

Solución Podemos escribir

$$\frac{1}{(1 + x^2)^n} = \frac{(1 + x^2) - x^2}{(1 + x^2)^n}$$

y la integral resulta

$$I_n = \int \frac{dx}{(1 + x^2)^{n-1}} - \int \frac{x \cdot x \, dx}{(1 + x^2)^n}.$$

Calculando la última integral por partes se tiene

$$I_n = I_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)} \left[x (1 + x^2)^{-n+1} - \int (1 + x^2)^{-n+1} dx \right] =$$

$$= I_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)} \left[\frac{x}{(1 + x^2)^{n-1}} - I_{n-1} \right].$$

Finalmente se llega a la expresión

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(1 + x^2)^{n-1}} - \frac{2n - 3}{2n - 2} I_{n-1}$$

Caso particular: $I_1 = \operatorname{arc\,tg} x + C.$

Calcular las siguientes integrales (1).

1 $\int \arccos \frac{1}{x} \, dx$ 2. $\int e^{2x} \operatorname{sen} \frac{1}{2} x \, dx.$

(1) Los resultados se encuentran en las páginas 347-348.

3 $\int (e^{-x} - x)^2\, dx.$ 4 $\int x \operatorname{arc\,cotg} x\, dx$

5 $\int \ln (x^2 + 1)\, dx.$ 6 $\int x^2 e^{-x}\, dx.$

7 $\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx.$ 8. $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}}{x^2}\, dx.$

9 $\int x^2 \operatorname{sen} 3x\, dx$ 10 $\int \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}\, dx.$

11 $\int \sqrt{x+1} \ln (x + 1)\, dx$ 12 $\int e^{2x} \cos \frac{1}{2} x\, dx$

13 $\int \sec^3 x\, dx$ 14 $\int \operatorname{cosec}^3 2x\, dx$

(Hágase $u = \sec x$ y $dv = \sec^2 x\, dx$ y compárese con el resultado hallado en el ej 3 del § 5)

15 $\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}\, dx$ 16 $\int x^5 e^{-x}\, dx$

17 $\int x \operatorname{sen} x \cdot \cos x\, dx$ 18 $\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx$

19 $\int e^x \operatorname{sen} x \cos x\, dx$ 20 $\int \operatorname{Ch} x \cdot \operatorname{sen} x\, dx$

21 $\int \operatorname{Sh} x \cdot \cos x\, dx$ 22 $\int \operatorname{Ch} x \cdot \cos x\, dx$

23 Demostrar la siguiente fórmula de reducción

$$I_n = \int x^m (\ln x)^n\, dx = \frac{x^{m+1} (\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} I_{n-1}$$

24 Demostrar las siguientes fórmulas de reducción

$$I_n = \int x^n \operatorname{sen} x\, dx = - x^n \cos x + n I'_{n-1}$$

$$I'_n = \int x^n \cos x\, dx = x^n \operatorname{sen} x - n I_{n-1}$$

8. CALCULO DE INTEGRALES APLICANDO COMPLEJOS

El cálculo de las integrales

$$I_1 = \int e^{ax} \cos bx\, dx \quad \text{e} \quad I_2 = \int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx$$

se puede hacer aplicando dos veces la regla de integración por partes. Pero resultará más sencillo efectuar la combinación $I_1 + iI_2$ (i, unidad imaginaria; $i^2 = -1$). Recordando la fórmula de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

resulta, si se admite que $\int e^{kx}\, dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$, aún en el caso de ser k un número complejo

$$I_1 + iI_2 = \int e^{ax} (\cos bx + i \operatorname{sen} bx)\, dx = \int e^{ax} e^{ibx}\, dx = \int e^{(a+bi)x}\, x =$$
$$= \frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi} + C = \frac{e^{ax}e^{ibx}}{a+bi} + C =$$
$$= \frac{a-bi}{a^2+b^2} e^{ax} (\cos bx + i \operatorname{sen} bx) + C.$$

Puesto que la igualdad de 2 complejos comporta la de sus partes reales e imaginarias, resulta

$$I_1 = \int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \cos bx + b \operatorname{sen} bx) + C.$$

$$I_2 = \int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \operatorname{sen} bx - b \cos bx) + C.$$

NOTA:

Estas integrales pueden calcularse aun más fácilmente observando que en virtud de la regla de diferenciación de un producto es

$$d\,(e^{ax} \operatorname{sen} bx) = (ae^{ax} \operatorname{sen} bx + be^{ax} \cos bx)\, dx,$$
$$d\,(e^{ax} \cos bx) = (ae^{ax} \cos bx - be^{ax} \operatorname{sen} bx)\, dx$$

Multiplicando la primera igualdad por a y la segunda por $-b$ y sumando resulta

$$a\, d(e^{ax} \operatorname{sen} bx) - b\, d(e^{ax} \cos bx) = (a^2 + b^2)\, e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx$$

Integrando se tiene

$$(a^2 + b^2) \int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx = e^{ax} (a \operatorname{sen} bx - b \cos bx) + C.$$

Multiplicando, en cambio, la primera igualdad por b y la segunda por a, sumando e integrando resulta

$$(a^2 + b^2) \int e^{ax} \cos bx\, dx = e^{ax} (b \operatorname{sen} bx + a \cos bx) + C$$

Como recapitulación de los casos de integración tratados hasta aquí recomendamos resolver los siguientes ejercicios, que podrán verificarse con los resultados de las páginas 348-350.

1. $\int \sqrt[3]{2 + 3x}\, dx$

2. $\int x \sqrt{a^2 + x^2}\, dx.$

3. $\int x \sqrt{ax^2 + b}\, dx.$

4. $\int (e^x - e^{-x})^2\, dx$

5. $\int e^{\operatorname{tg} x} \sec^2 x\, dx$

6. $\int a^{nx}\, dx.$

7. $\int \sqrt{e^x}\, dx.$

8. $\int 2^x e^x\, dx.$

9. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}\, dx.$

(Hágase la sustitución $\sqrt{x} - 1 = t$).

10. $\int \frac{(2x + 1)\, dx}{x - 1}.$

11. $\int \frac{x^2 + 1}{x + 2} dx$

12. $\int \frac{x - 2}{2x - 1} dx.$

13. $\int (\cos x - \operatorname{sen} x)^2 dx$

14. $\int \frac{\cos n\alpha}{\sqrt{\operatorname{sen} n\alpha}} d\alpha$

15. $\int \operatorname{tg}^3 x \cdot \sec^2 x \, dx.$

16. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x}} dx.$

17. $\int \left(\frac{\sec x}{a + b \operatorname{tg} x}\right)^2 dx.$

18. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{a + b \cos x} dx.$

19. $\int \frac{x^2}{1 - x^3} dx$

20. $\int \operatorname{sen}^3 2x \cdot \cos^2 2x \, dx.$

21. $\int \frac{\operatorname{sen}^5 x}{\cos^2 x} dx$

22. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\cos x}} dx$

23. $\int \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos^4 x \, dx$

24. $\int \frac{\operatorname{cosec} 2\theta \operatorname{cotg} 2\theta}{1 + 2 \operatorname{cosec} 2\theta} d\theta$

25. $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^4 x} dx$

26. $\int \operatorname{cotg}^4 x \, dx.$

27. $\int \operatorname{cosec}^6 x \, dx$

28. $\int \frac{dx}{x^2 + 4}.$

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}.$

30. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}$

31. $\int \frac{e^x \, dx}{1 + e^x}.$

32. $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1 - x^4}}.$

33. $\int \frac{x \, dx}{1 + 4x^4}.$

34. $\int \frac{dx}{16 + (x - 1)^2}.$

35. $\int \frac{dt}{\sqrt{9 - (t + 1)^2}}.$

36. $\int \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

37. $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1 + x^2} dx.$

38. $\int \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{4 - \cos^2 t}} dt$

(Hágase $\cos t = 2z$)

39. $\int \frac{x - 1}{\sqrt{8x - x^2}} dx.$

40. $\int \frac{2x - 3}{\sqrt{6x - 9x^2 + 3}} dx$

41. $\int \frac{4x - 1}{\sqrt{9 - 5x^2}} dx$

42. $\int \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} dx.$

[Multiplíquese y divídase la expresión subradical por $(1 + x)$]

43. $\int \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + x}} dx.$

44. $\int \frac{2x + 1}{\sqrt{3 + 5x^2}} dx$

45. $\int x^2 \operatorname{arc\,tg} x \, dx$

46. $\int \frac{x \operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$

47. $\int \operatorname{Sh}^4 x \, dx$

48. $\int \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{Sh} x \, dx$

9. INTEGRACION DE FUNCIONES RACIONALES

INTRODUCCIÓN. Hemos calculado anteriormente integrales del tipo

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}, \qquad \int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c}\, dx,$$

mediante sustituciones apropiadas que las conducen a las fórmulas (XIII) y (XIV).

Otro modo de calcular estas integrales, de aplicación sencilla y que nos permitirá *resolver la integral de cualquier expresión racional*, es la descomposición en fracciones simples (ver pág 54).

Empecemos por algunos ejemplos sencillos

Sea calcular $I_1 = \int \frac{4x - 7}{x^2 - 3x + 2}\, dx$

Por ser $\frac{4x - 7}{x^2 - 3x + 2} = \frac{4x - 7}{(x - 1)(x - 2)}$ se podrá escribir en la forma $\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2}$.

Recordemos que para la determinación de A y B hay que identificar los numeradores $A(x - 2) + B(x - 1) \equiv 4x - 7$. En particular, si $x = 1$, resulta $-A = -3$, y si $x = 2$, $B = 1$ Entonces es

$$I_1 = \int \left[\frac{3}{x - 1} + \frac{1}{x - 2} \right] dx = 3 \int \frac{dx}{x - 1} + \int \frac{dx}{x - 2} = 3 \ln (x - 1) + \ln (x - 2) + C$$

que también se puede escribir

$$I_1 = \ln [(x - 1)^3 (x - 2)] + C$$

Veamos otra integral ya calculada anteriormente (pág 290)

$$I_2 = \int \frac{dx}{a^2 - b^2x^2}.$$

Como es $\frac{1}{a^2 - b^2x^2} = \frac{1}{(a + bx)(a - bx)} = \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{a + bx} + \frac{1}{a - bx} \right]$, resulta

$$I_2 = \frac{1}{2ab} [\ln (a + bx) - \ln (a - bx)] + C = \frac{1}{2ab} \ln \frac{a + bx}{a - bx} + C$$

Finalmente, si se trata de calcular

$$I_3 = \int \frac{2x^3 - 11x^2 + 23x - 17}{x^2 - 3x + 2}\, dx,$$

como el grado del numerador de la expresión subintegral es superior al del denominador, se comienza por efectuar el cociente indicado Resulta

$$\frac{2x^3 - 11x^2 + 23x - 17}{x^2 - 3x + 2} = 2x - 5 + \frac{4x - 7}{x^2 - 3x + 2}$$

y, por lo tanto, es

$$I_3 = \int (2x - 5)\, dx + I_1,$$

con I_1 calculado más arriba Por consiguiente, resulta

$$I_3 = x^2 - 5x + \ln [(x - 1)^3 (x - 2)] + C$$

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA GENERAL: Sea

$$I = \int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}\,dx.$$

Si el grado del polinomio $P(x)$ es mayor o igual que el grado del polinomio $Q(x)$, es decir, si $n \geqslant m$, se efectúa la división indicada, obteniéndose como cociente un polinomio de integración inmediata y como resto otra función racional que tendrá un numerador de menor grado que el del denominador $Q(x)$. Por lo tanto, es suficiente referirse, en lo sucesivo, al caso $n < m$.

Distinguiremos 4 casos.

I) Todas las raíces $(a, b, \ldots, l)$ del denominador son simples, es decir, el polinomio $Q(x)$ se puede descomponer en la siguiente forma (ver pág. 49):

$$Q(x) = (x-a)\,(x-b)\ldots(x-l) \qquad [1]$$

(supuesto que sea $b_0 = 1$).

En este caso se podrá escribir

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{L}{x-l}.$$

La identidad siempre se puede lograr en este caso, pues los denominadores son idénticos de acuerdo a [1], y para que lo sean los numeradores debe verificarse la relación

$$\begin{aligned} P(x) \equiv A\,&(x-b)\,(x-c)\ldots(x-l) + \\ &+ B\,(x-a)\,(x-c)\ldots(x-l) + \ldots + \\ &+ L\,(x-a)\,(x-b)\ldots(x-k). \end{aligned}$$

Los coeficientes $A, B, \ldots, L$ se determinan haciendo sucesivamente $x = a$, $x = b$, $\ldots$, $x = l$, pues entonces resulta

$$P(a) = A\,(a-b)\,(a-c)\ldots(a-l),$$

es decir,

$$A = \frac{P(a)}{(a-b)\,(a-c)\ldots(a-l)},$$

$$P(b) = B\,(b-a)\,(b-c)\ldots(b-l),$$

es decir,

$$B = \frac{P(b)}{(b-a)\,(b-c)\ldots(b-l)},$$

y, finalmente,

$$P(l) = L\,(l-a)\,(l-b)\ldots(l-k),$$

es decir,

$$L = \frac{P(l)}{(l-a)\,(l-b)\,\cdots\,(l-k)}.$$

EJEMPLO

Sea calcular $I = \int \frac{x^4 - 3x^3 - 21x^2 + 85x - 63}{x^3 + x^2 - 17x + 15}\,dx$

Empezaremos por efectuar el cociente indicado

$$\frac{x^4 - 3x^3 - 21x^2 + 85x - 63}{x^3 + x^2 - 17x + 15} = x - 4 + \frac{2x - 3}{x^3 + x^2 - 17x + 15}.$$

Integrando resulta

$$I = \frac{1}{2}x^2 - 4x + \int \frac{2x - 3}{x^3 + x^2 - 17x + 15}\,dx$$

El denominador de la fracción que figura en la expresión subintegral admite, evidentemente, la raíz $a = 1$ Despojándolo de esta raíz queda el trinomio de segundo grado $x^2 + 2x - 15$, cuyas raíces son $b = -5$ y $c = 3$ La descomposición resulta entonces

$$\frac{2x - 3}{x^3 + x^2 - 17x + 15} = \frac{2x - 3}{(x-1)\,(x+5)\,(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+5} + \frac{C}{x-3}$$

Como deben ser idénticos los numeradores

$$A\,(x+5)\,(x-3) + B\,(x-1)\,(x-3) + C\,(x-1)\,(x+5) \equiv 2x - 3,$$

se obtiene, haciendo sucesivamente $x = 1$, $x = -5$ y $x = 3$,

$$6\,(-2)\,A = 2 - 3, \qquad A = \frac{1}{12},$$

$$(-6)\,(-8)\,B = -10 - 3, \qquad B = -\frac{13}{48},$$

$$2\,(8)\,C = 6 - 3 \qquad C = \frac{3}{16},$$

y resulta

$$I = \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{1}{12}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{13}{48}\int \frac{dx}{x+5} + \frac{3}{16}\int \frac{dx}{x-3},$$

es decir,

$$I = \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{1}{12}\ln(x-1) - \frac{13}{48}\ln(x+5) + \frac{3}{16}\ln(x-3) + C$$

que se puede escribir

$$I = \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{1}{48}\ln\frac{(x-1)^4\,(x-3)^9}{(x+5)^{13}} + C$$

Otro método para hallar los coeficientes en la descomposición de las fracciones racionales Puesto que en el caso de las raíces simples es

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \cdots + \frac{L}{x-l},$$

multiplicando ambos miembros por $(x - a)$ y pasando al límite para $x \to a$ se tiene

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)}\,(x-a) = A$$

Como tanto el numerador como el denominador tienden a 0 cuando $x \to a$, se puede determinar su "verdadero valor", de acuerdo a la regla de L'Hospital, calculando el cociente de las derivadas

$$A = \lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} (x - a) = \lim_{x \to a} \frac{P'(x) \cdot (x - a) + P(x)}{Q'(x)} = \frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

En la misma forma resulta $B = \frac{P(b)}{Q'(b)}$, $C = \frac{P(c)}{Q'(c)}$, $\ldots$, $L = \frac{P(l)}{Q'(l)}$.

Para el ejemplo antes considerado, con $P(x) = 2x - 3$ y $Q(x) = x^3 + x^2 - 17x + 15$, se tiene $Q'(x) = 3x^2 + 2x - 17$, y haciendo sucesivamente $x = 1$, $x = -5$ y $x = 3$ se obtiene $A = \frac{1}{12}$, $B = -\frac{13}{48}$ y $C = \frac{3}{16}$.

II) Las raíces del denominador son múltiples, es decir, es

$$Q(x) = (x - a)^{\alpha} (x - b)^{\beta} \ldots (x - l)^{\lambda}$$

(indicando con α, β, $\ldots$, λ los órdenes de multiplicidad y pudiendo ser algunos iguales a 1 caso de raíces simples)

Supongamos, para fijar las ideas, que el denominador sea

$$Q(x) = (x - a)^3 (x - b) (x - c).$$

Mostraremos que la fracción racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se puede escribir como suma de 5 sumandos de integración inmediata

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_0}{(x - a)^3} + \frac{A_1}{(x - a)^2} + \frac{A_2}{x - a} + \frac{B}{x - b} + \frac{C}{x - c}.$$

El M C M de los denominadores es $(x - a)^3 (x - b) (x - c)$, que es precisamente $Q(x)$ El numerador es entonces

$$\begin{aligned} A_0 (x - b) (x - c) &+ A_1 (x - a) (x - b) (x - c) + \\ &+ A_2 (x - a)^2 (x - b) (x - c) + \\ &+ B (x - a)^3 (x - c) + \\ &+ C (x - a)^3 (x - b), \end{aligned}$$

polinomio que debe identificarse con $P(x)$ Para determinar los coeficientes, lo más cómodo es darle a la variable x los valores a, b, c y otros dos valores cualesquiera. Así resulta, para $x = a$,

$$A_0 (a - b) (a - c) = P(a),$$

y de aquí se obtiene A_0. En forma análoga se hallan B y C Para determinar A_1 y A_2 basta dar a x los valores 0 y 1, por ejemplo (si ninguna de las raíces tiene esos valores), u otros 2 cualesquiera, para obtener 2 ecuaciones con 2 incógnitas (teniendo en cuenta que ya se han obtenido 3 coeficientes).

EJEMPLO

Sea calcular $I = \int \frac{x^2 + x + 1}{x^3 (x + 1)^2} dx.$

Puesto que en el denominador se presenta la raíz doble -1 y la raíz triple 0, escribiremos

$$\frac{x^2+x+1}{x^3(x+1)^2}=\frac{A_0}{x^3}+\frac{A_1}{x^2}+\frac{A_2}{x}+\frac{B_0}{(x+1)^2}+\frac{B_1}{x+1}$$

Siendo el MCM $x^3(x+1)^2$ resulta de la identificación de los numeradores

$$A_0(x+1)^2+A_1(x+1)^2x+A_2x^2(x+1)^2+B_0x^3+B_1x^3(x+1)\equiv$$
$$\equiv x^2+x+1$$

Haciendo $x=0$ resulta $A_0=1$, y haciendo $x=-1$ resulta $B_0=-1$.

Faltan determinar 3 coeficientes Como se trata de una identidad podemos dar a x valores cualesquiera, por ejemplo para $x=1$, $x=2$ y $x=3$, es:

$$4A_0+4A_1+4A_2+B_0+2B_1=3,$$
$$9A_0+18A_1+36A_2+8B_0+24B_1=7,$$
$$16A_0+48A_1+144A_2+27B_0+108B_1=13.$$

Teniendo en cuenta que es $A_0=1$ y $B_0=-1$ resultan $A_1=-1$, $A_2=2$, $B_1=-2$ y la integral buscada se transforma en la siguiente

$$I=\int\frac{dx}{x^3}-\int\frac{dx}{x^2}+2\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{(x+1)^2}-2\int\frac{dx}{x+1},$$

es decir,

$$I=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+2\ln x+\frac{1}{x+1}-2\ln(x+1)+C,$$

que puede escribirse

$$I=\frac{4x^2+x-1}{2x^2(x+1)}+\ln\frac{x^2}{(x+1)^2}+C.$$

Otro procedimiento para el cálculo de los coeficientes, similar al explicado para el caso de raíces simples, lo encontrará el lector en la página 320, ejercicio N° 44.

III) En el denominador hay raíces imaginarias simples. Si bien en este caso puede procederse como en el caso I), a fin de evitar la aparición de coeficientes imaginarios es conveniente dejar sin resolver las expresiones cuadráticas que corresponden a raíces imaginarias conjugadas.

La integración de expresiones del tipo $\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx$ se puede resolver siempre (de acuerdo a lo visto en pág. 291) utilizando arcos tangentes y logaritmos. Veamos en un ejemplo concreto cómo debe procederse.

Sea $I=\int\frac{x\,dx}{1+x^3}$.

El denominador admite la raíz $a=-1$ y aplicando la regla de Ruffini resulta

$$1+x^3=(x+1)(x^2-x+1).$$

El factor cuadrático x^2-x+1 admite 2 raíces imaginarias y para evitarlas intentaremos una descomposición del tipo

$$\frac{x}{1+x^3}=\frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}. \qquad [1]$$

Debiendo existir identidad de numeradores se tiene

$$A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)\equiv x$$

Con $x=-1$ se obtiene $3A=-1$, o sea, $A=-\frac{1}{3}$.

Con $x=0$ y $x=1$ se obtienen, sucesivamente,

$$A+C=0 \quad \text{y} \quad A+2B+2C=1$$

Así, resulta $B=\frac{1}{3}$ y $C=\frac{1}{3}$.

El cálculo de I se lleva a la forma

$$I=-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{3}\int\frac{x+1}{x^2-x+1}\,dx$$

La primera es una integral inmediata $-\frac{1}{3}\ln(x+1)+C_1$

La segunda se puede escribir

$$\frac{1}{3}\int\frac{x+1}{x^2-x+1}\,dx=\frac{1}{3}\int\frac{x+1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx=\frac{1}{3}\int\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx=$$

$$=\frac{1}{6}\int\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]+\frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}+C_2$$

Reuniendo los resultados parciales y haciendo algunas simplificaciones se obtiene

$$I=\int\frac{x}{1+x^3}\,dx=\frac{1}{6}\ln\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$$

También podía haberse procedido, como en el caso I, utilizando raíces complejas.

Por ser

$$1+x^3=(x+1)(x^2-x+1)=(x+1)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2),$$

con

$$\alpha_1=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i),\ \alpha_2=\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i),$$

será

$$\frac{x}{1+x^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-\alpha_1}+\frac{C}{x-\alpha_2}$$

Los coeficientes A, B y C se determinan identificando los numeradores

$$A(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)+B(x+1)(x-\alpha_2)+C(x+1)(x-\alpha_1)\equiv x.$$

Para $x=-1$ resulta $A(-1-\alpha_1)(-1-\alpha_2)=-1$.

Para $x=\alpha_1$ resulta $B(\alpha_1+1)(\alpha_1-\alpha_2)=\alpha_1$

Para $x=\alpha_2$ resulta $C(\alpha_2+1)(\alpha_2-\alpha_1)=\alpha_2$.

De acuerdo a los valores de α_1 y α_2 se obtiene $A=-\frac{1}{3}$, $B=\frac{1-\sqrt{3}i}{6}$ y $C=\frac{1+\sqrt{3}i}{6}$.

Como se ve, los coeficientes B y C son complejos conjugados Efectuando la suma de los 2 últimos términos se tiene

$$\frac{B}{x-\alpha_1}+\frac{C}{x-\alpha_2}=\frac{\frac{1}{6}(1-\sqrt{3}i)}{x-\alpha_1}+\frac{\frac{1}{6}(1+\sqrt{3}i)}{x-\alpha_2}=$$

$$=\frac{(1-\sqrt{3}i)(x-\alpha_2)+(1+\sqrt{3}i)(x-\alpha_1)}{6[x^2-(\alpha_1+\alpha_2)x+\alpha_1\alpha_2]}=$$

$$=\frac{2x+2}{6(x^2-x+1)}=\frac{x+1}{3(x^2-x+1)},$$

tal como había resultado anteriormente

NOTA

Es fácil ver que este resultado es general, mostrando que si $Q(x)$ admite una raíz compleja $\alpha+\beta i$, admite también la conjugada $\alpha-\beta i$ y que los coeficientes correspondientes son complejos conjugados $M+Ni$ y $M-Ni$ Entonces, de $\frac{M+Ni}{x-(\alpha+\beta i)}+\frac{M-Ni}{x-(\alpha-\beta i)}$ se llega, efectuando las operaciones necesarias a $\frac{2Mx-(M\alpha+N\beta)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}=\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$, con lo cual queda justificada la regla dada en [1]

IV) En el denominador hay raíces imaginarias múltiples También este caso se puede resolver procediendo como se ha explicado en el caso II) Pero a fin de evitar los imaginarios se dejan sin descomponer los correspondientes factores cuadráticos

En el caso de raíces dobles se llega a expresiones cuyas integrales son inmediatas si agregamos a las ya vistas la integral

$$I=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2a^2}\int\frac{(x^2+a^2)+(a^2-x^2)}{(x^2+a^2)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2a^2}\int\frac{dx}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^2}\int\frac{a^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}-\frac{1}{2a^2}\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx.$$

Resulta entonces

$$I=\frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+\frac{1}{2}I+\frac{1}{4a^2}\int x\,d\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)$$

Agrupando los términos en I e integrando por partes la última expresión resulta

$$\frac{1}{2}I = \frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + \frac{x}{4a^2(x^2+a^2)} - \frac{1}{4a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C$$

O sea, finalmente,

$$I = \frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\frac{x}{a^2(x^2+a^2)} + C \qquad [1]$$

EJEMPLO

Sea calcular $I = \int \frac{3x^3+4x-2}{(x^2+1)^2}dx$

Las raíces son $+i$ y $-i$ contadas 2 veces Pero en lugar de proceder como en el caso II, escribiremos

$$\frac{3x^3+4x-2}{(x^2+1)^2} \equiv \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

La identidad de los numeradores conduce a

$Ax+B+(Cx+D)(x^2+1) = Cx^3+Dx^2+(A+C)x+B+D \equiv 3x^3+4x-2$, y debiendo coincidir los coeficientes resulta $C=3$, $D=0$, $A=1$ y $B=-2$

Entonces es

$$I = \int\frac{(x-2)\,dx}{(x^2+1)^2} + \int\frac{3x\,dx}{x^2+1},$$

que escribiremos así

$$I = \frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2} - 2\int\frac{dx}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+1} = I_1 + I_2 + I_3, \text{ con}$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2(x^2+1)} + C_1$$

$$I_2 = -2\int\frac{dx}{(x^2+1)^2} = -\operatorname{arc\,tg} x - \frac{x}{x^2+1} + C_2 \text{ por } [1]$$

$$I_3 = \frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{3}{2}\ln(x^2+1) + C_3$$

Y resumiendo,

$$I = -\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+1} - \operatorname{arc\,tg} x + \frac{3}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

En el caso de raíces imaginarias múltiples, con un orden de multiplicidad superior a 2, aparecen expresiones del tipo $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, que ya hemos calculado mediante una fórmula de recurrencia, aplicando la integración por partes (pág 306)

TEOREMA GENERAL DE INTEGRACIÓN DE LAS FUNCIONES RACIONALES Hemos mostrado, en base a ejemplos concretos, cómo toda ex-

presión racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, se puede descomponer en fracciones simples de integración inmediata.

En base a estos resultados, cuya generalidad es evidente, podemos afirmar que

Toda expresión racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *es integrable mediante funciones elementales: algebraicas (polinomios y racionales fraccionarias) y trascendentes (logaritmos y arcos tangentes).*

EJERCICIOS

Verificar las siguientes integrales

1 $\int \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{6}\ln\frac{x-3}{x+3} + C.$

2. $\int \frac{x^3+x^2+2}{x^3-x}\,dx = x + \ln\frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2} + C$

3. $\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}\,dx = \frac{1}{6}\ln\frac{x^3(x-2)}{(x+1)^4} + C.$

4. $\int \frac{x^4-3}{x^3+x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{x} + \ln\frac{x^3}{(x+1)^2} + C.$

5. $\int \frac{x^2-x+4}{(x-2)(x-1)^2}\,dx = \frac{4}{x-1} + \ln\frac{(x-2)^6}{(x-1)^5} + C.$

6. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^3} = \frac{1-2x}{2(x-1)^2} + C$

7. $\int \frac{1+x}{x(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2} + \operatorname{arc\,tg} x + C.$

8. $\int \frac{dx}{1-x^4} = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C.$

9. $\int \frac{dx}{x^3+x^2+x} = -\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$

10. $\int \frac{x^2-a^2}{x(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{1}{2a^2}\ln\frac{x^2+a^2}{x^2} - \frac{1}{x^2+a^2} + C$

Calcular las siguientes integrales [1]:

1 $\int \frac{dx}{4x^2-25}.$

2. $\int \frac{\operatorname{sen} t}{9-\cos^2 t}\,dt.$ (Hágase $\cos t = z$)

3 $\int \frac{dz}{z^2-4z}.$

4. $\int \frac{3x+2}{2x-x^2}\,dx.$

5 $\int \frac{x^4+1}{x^3-x}\,dx$

6 $\int \frac{1+x^2}{x^3+3x^2+2x}\,dx.$

(1) Los resultados se encuentran en las páginas 350-352

7. $\int \frac{x\,dx}{x^2 + 6x + 8}$.

8. $\int \frac{x^2 - 1}{(x - 2)(x - 3)}\,dx$

9. $\int \frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - 3x + 2}\,dx$

10. $\int \frac{dx}{x(1 - x^2)}$.

11 $\int \frac{2x + 3}{x(x - 1)(x + 2)}\,dx$

12 $\int \frac{x^2\,dx}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}$.

13 $\int \frac{2x - 1}{x^2 - 6x - 7}\,dx$

14 $\int \frac{dx}{x^2 + 2x - 8}$.

15. $\int \frac{dt}{t^2 - 14t + 45}$.

16 $\int \frac{dx}{1 + 3x + 2x^2}$.

17 $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\,dx$.

18 $\int \frac{3\,dx}{x^3 - 9x}$.

19 $\int \frac{x^2 + 3x}{(x - 2)(x^2 + 3x + 2)}\,dx$

20 $\int \frac{x - 1}{(x + 1)^2\,x}\,dx$

21 $\int \frac{x^2 - 4x + 8}{x^3 + 4x^2}\,dx$.

22. $\int \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^3}\,dx$

23 $\int \frac{3x + 2}{x(x + 1)^3}\,dx$.

24. $\int \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} + 2}\,dx$.
(Hágase $e^{2x} = z$).

25 $\int \frac{dx}{(1 - x)\sqrt{x}}$.
(Hágase la sustitución $\sqrt{x} = t$).

26. $\int \frac{x\,dx}{x^4 - x^2 - 2}$.

27. $\int \frac{dx}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

28. $\int \frac{x\,dx}{(x - a)(x - b)(x - c)}$.

29 $\int \frac{x\,dx}{(x - a)^2(x - b)}$.

30. $\int \frac{x\,dx}{(x - a)^2(x - b)^2}$.

31. $\int \frac{x\,dx}{(x - a)^3}$.

32. $\int \frac{x\,dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$.

33. $\int \frac{2x}{x^4 - 16}\,dx$.

34 $\int \frac{8\,dx}{(x^2 + 4)(x + 2)^2}$.

35. $\int \frac{x^3\,dx}{(x^2 + 2)(x^2 + 1)}$.

36 $\int \frac{x^2\,dx}{(x - 1)^2(x^2 + 1)}$.

37. $\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1}\,dx$

38. $\int \frac{x\,dx}{(x + 1)(x + 2)^2}$.

39. $\int \frac{x^2\,dx}{(x + 1)(x + 2)^2}$.

40 $\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2}$.

41 $\int \frac{dx}{x^2(1 - x)^2}$.

42. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2 - 1)^2}$.

43. $\int \frac{dx}{x^3(x + 1)}$.

44 Si un polinomio $Q(x)$ admite las raíces múltiples $a, b, \ldots, l$, con los órdenes de multiplicidad $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, la descomposición $P(x)/Q(x)$ toma la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} +$$
$$+ \frac{B_0}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ \frac{L_0}{(x-l)^{\lambda}} + \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{L_{\lambda-1}}{x-l}.$$

Si se construyen las funciones $A(x), B(x), \ldots, L(x)$, mediante las relaciones

$$A(x) = (x-a)^{\alpha}\frac{P(x)}{Q(x)}; \quad B(x) = (x-b)^{\beta}\frac{P(x)}{Q(x)};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \quad L(x) = (x-l)^{\lambda}\frac{P(x)}{Q(x)},$$

demuéstrese que los coeficientes se pueden calcular por las fórmulas muy útiles en las aplicaciones prácticas

$$A_0 = A(a),\ A_1 = \frac{A'(a)}{1!},\ A_2 = \frac{A''(a)}{2!},\ \ldots,\ A_{\alpha-1} = \frac{A^{(\alpha-1)}(a)}{(\alpha-1)!},$$
$$B_0 = B(b),\ B_1 = \frac{B'(b)}{1!},\ B_2 = \frac{B''(b)}{2!},\ \ldots,\ B_{\beta-1} = \frac{B^{(\beta-1)}(b)}{(\beta-1)!},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$L_0 = L(l),\ L_1 = \frac{L'(l)}{1!},\ L_2 = \frac{L''(l)}{2!},\ \ldots,\ L_{\lambda-1} = \frac{L^{(\lambda-1)}(l)}{(\lambda-1)!}$$

45 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)}$

46 $\displaystyle\int \frac{x^2}{1-x^4}\,dx$

47 $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(1+x)(1+x^2)}$

48 $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)}$

49 $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^3+4x}\,dx$

50 $\displaystyle\int \frac{(3x+7)\,dx}{2x^2-3x+5}$.

51 $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2+2x+3}\,dx$

52 $\displaystyle\int \frac{x^3-2x^2+1}{x^4+x^2}\,dx$

53 $\displaystyle\int \frac{x^3+2x-1}{x^4+x^2}\,dx$

54 $\displaystyle\int \frac{x^2-a^2}{x^2(x^2+a^2)}\,dx$

55 $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$

56 $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+8}{(x^2+4)^2}\,dx$

57 $\displaystyle\int \frac{4x^3-2x^2+x-1}{x^2(4x^2+1)}\,dx$

58 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}$

59. $\int \frac{dx}{1+x^4}$.   60. $\int \frac{dx}{1+x^3}$.

61. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ 62. $\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$

63. $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{(1+x^2)^2}\,dx$

[Intégrese por partes, con $u = \operatorname{arc\,tg} x$ y $dv = \frac{dx}{(1+x^2)^2}$].

64. Verificar la fórmula $\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+xi}{1-xi}$ aplicando al cálculo de la integral $\int \frac{dx}{1+x^2}$ el método de integración por descomposición en fracciones simples $[1 + x^2 = (x+i)(x-i)]$.

10. INTEGRACION DE FUNCIONES IRRACIONALES ALGEBRAICAS

Hemos mostrado en el § 9 que toda función racional es integrable mediante funciones elementales (polinomios, racionales fraccionarias, logaritmos, circulares inversas).

No existe un teorema análogo para las funciones irracionales, pero sí se pueden estudiar casos integrables de estas funciones

Ya se han presentado numerosos tipos de expresiones irracionales con argumento lineal y cuadrático que hemos podido integrar. Así, ha resultado:

I) En el caso de argumento lineal.

1°) $$\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C.$$

2°) $$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \int (2x+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx = (2x+1)^{\frac{1}{2}} + C.$$

3°) $$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx = \frac{n}{(m+n)\,a} (ax+b)^{\frac{m+n}{n}} + C.$$

Más general aún, una integral irracional con argumento lineal fraccionario, tal como $\int \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m}\,dx$, donde m y n son números naturales, se puede integrar con la sustitución $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$, con lo que resulta

4°) $$\int \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m}\,dx = \int \frac{t^m\ t^{n-1}\,n\,(ad-bc)}{(a-ct^n)^2}\,dt =$$

$$= n\,(ad-bc)\int \frac{t^{m+n-1}}{(a-ct^n)^2}\,dt,$$

expresión racional en t y, por lo tanto, integrable.

Estos son casos particulares de un teorema general que asegura la integrabilidad, toda vez que la cantidad subintegral sea del tipo

$$R\left[x,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m'}{n'}}\right],$$

donde R es una función racional de sus argumentos.

Veamos cómo se procede en varios ejemplos

1°) Sea calcular $I_5 = \displaystyle\int \frac{1-\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

La expresion subintegral es la función racional $R = \dfrac{1-\alpha}{1+\beta}$, con $\alpha = x^{\frac{1}{4}}$ y $\beta = x^{\frac{1}{2}}$ Para racionalizar esta expresión hacemos la sustitución $x = t^4$, con lo cual se logra que desaparezcan los dos radicales, dado que es $x^{\frac{1}{4}} = t$ y $x^{\frac{1}{2}} = t^2$

Se tiene entonces

$$I_5 = 4\int \frac{1-t}{1+t^2}\,t^3\,dt = 4\int\left(-t^2+t+1-\frac{1+t}{1+t^2}\right)dt =$$

$$= -\frac{4}{3}t^3 + 2t^2 + 4t - 4\,\mathrm{arc\,tg}\,t - \ln\,(1+t^2)^2 + C,$$

y expresada en función de x resulta

$$I_5 = -\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + 2x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{1}{4}} - 4\,\mathrm{arc\,tg}\,x^{\frac{1}{4}}\ \ln -\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^2 + C.$$

En general, la potencia de la nueva variable es el M C M de los denominadores de las potencias a que se encuentra elevada x.

2°) Calcular $I_6 = \dfrac{dx}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}$.

En este caso es $R = \dfrac{1}{\alpha-\beta}$, con $\alpha = \sqrt[3]{1+x}$ y $\beta = \sqrt{1+x}$, y siendo $\dfrac{1}{3}$ y $\dfrac{1}{2}$ los exponentes de $(1+x)$, para los cuales el M C M de sus denomi-

nadores es 6, elegiremos la sustitución $1 + x = t^6$, con lo que resulta $\sqrt[3]{1+x} = t^2$, $\sqrt{1+x} = t^3$ y $dx = 6t^5\,dt$, y la integral es entonces

$$I_6 = 6\int \frac{t^5\,dt}{t^2 - t^3} = -6\int \frac{t^3\,dt}{t-1} = -2t^3 - 3t^2 - 6t - 6\ln(t-1) + C =$$

$$= -2(1+x)^{\frac{1}{2}} - 3(1+x)^{\frac{1}{3}} - 6(1+x)^{\frac{1}{6}} - 6\ln(\sqrt[6]{1+x} - 1) + C.$$

II) Hemos estudiado ya todas las integrales del tipo

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

con a, b y c constantes cualesquiera (positivas o negativas), habiendo mostrado que siempre se pueden conducir a uno de los casos siguientes·

$$\int \sqrt{z^2+1}\,dz, \qquad \int \sqrt{z^2-1}\,dz, \qquad \int \sqrt{1-z^2}\,dz,$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}}, \qquad \int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}, \qquad \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Ya hemos visto también (pág. 293 y 299) cómo estas integrales se resuelven muy fácilmente con las siguientes sustituciones:

$z = \mathrm{Sh}\,t$, $z = \mathrm{Ch}\,t$, $z = \mathrm{sen}\,t$, $z = \mathrm{Sh}\,t$, $z = \mathrm{Ch}\,t$, $z = \mathrm{sen}\,t$,

advirtiendo además que las tres últimas ya figuran en la tabla de integrales inmediatas.

Volveremos a calcular ahora algunas de estas expresiones sin emplear funciones hiperbólicas (directas e inversas).

1°) Sea calcular $I_1 = \int \sqrt{z^2+1}\,dz$. Haciendo $\sqrt{z^2+1} = t + z$ resulta $1 = t^2 + 2tz$ y, por lo tanto, $z = \dfrac{1-t^2}{2t}$ y $dz = -\dfrac{t^2+1}{2t^2}dt$.

La integral queda entonces

$$I_1 = -\int\left(t + \frac{1-t^2}{2t}\right)\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt = -\frac{1}{4}\int \frac{(1+t^2)^2}{t^3}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\int (t^{-3} + 2t^{-1} + t)\,dt = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}t^{-2} + 2\ln t + \frac{1}{2}t^2\right) + C =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{t^2} - t^2\right) + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{t} + C.$$

Si $t = \sqrt{z^2+1} - z$, resulta, racionalizando, $\dfrac{1}{t} = \sqrt{z^2+1} + z$ y $\dfrac{1}{t^2} - t^2 = 4z\sqrt{z^2+1}$, con lo que se obtiene, finalmente,

$$I_1 = \frac{1}{2} z \sqrt{z^2+1} + \frac{1}{2} \ln (z + \sqrt{z^2+1}) + C.$$

2°) Calcular $I_2 = \int \sqrt{z^2-1}\, dz$. Sustituyendo $\sqrt{z^2-1} = t + z$ resulta $-1 = t^2 + 2tz$ y, por consiguiente, $z = -\frac{1+t^2}{2t}$,

$dz = -\frac{t^2-1}{2t^2}dt$ e

$$I_2 = -\int \left(t - \frac{1+t^2}{2t}\right) \frac{t^2-1}{2t^2} dt = -\frac{1}{4}\int \frac{(t^2-1)^2}{t^3}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\int (t^{-3} - 2t^{-1} + t)\, dt = -\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2}t^{-2} - 2\ln t + \frac{1}{2}t^2\right] +$$

$$+ C = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{t^2} - t^2\right) + \frac{1}{2}\ln t + C =$$

$$= \frac{1}{2} z\sqrt{z^2-1} + \frac{1}{2}\ln (\sqrt{z^2-1} - z) + C.$$

3°) Calcular $I_3 = \int \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}}$. Haciendo la misma sustitución que en los casos anteriores se tiene $1 = t^2 + 2tz$, pero en lugar de despejar z a partir de esta relación y calcular luego dz, es mucho más conveniente diferenciar ambos miembros, con lo que se obtiene $0 = 2t\, dt + 2t\, dz + 2z\, dt$, o sea, $dz = -\frac{t+z}{t}dt$

Reemplazando resulta

$$I_3 = -\int \frac{1}{t+z}\frac{t+z}{t}dt = -\int \frac{dt}{t} = -\ln t + C = \ln\frac{1}{t} + C =$$

$$= \ln\frac{1}{\sqrt{z^2+1} - z} + C = \ln (z + \sqrt{z^2+1}) + C$$

Análogamente resulta

4°) $$I_4 = \int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \ln (z + \sqrt{z^2-1}) + C.$$

EJEMPLOS

1°) Para calcular $\int \sqrt{x^2+6x+10}\, dx$ basta escribir el trinomio en la forma $x^2 + 6x + 10 = (x+3)^2 + 1$ y hacer la sustitución $x + 3 = z$ Resulta entonces

$$\int \sqrt{x^2+6x+10}\,dx = \int \sqrt{z^2+1}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2} z \sqrt{z^2+1} + \frac{1}{2} \ln (z + \sqrt{z^2+1}) + C =$$

$$= \frac{1}{2} (x+3) \sqrt{x^2+6x+10} + \frac{1}{2} \ln (x + 3 + \sqrt{x^2+6x+10}) + C.$$

2º) Calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+x-10}}$. El trinomio se escribirá

$$2x^2 + x - 10 = 2\left(x^2 + \frac{1}{2}x - 5\right) = 2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{81}{16}\right].$$

Con la sustitución $x + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} z$ resulta

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+x-10}} = \frac{9}{4} \int \frac{dz}{\sqrt{2} \cdot \frac{9}{4} \sqrt{z^2-1}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \ln (z + \sqrt{z^2-1}) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \ln\left[\frac{4x+1}{9} + \sqrt{\frac{8}{81}(2x^2+x-10)}\right] + C$$

3º) Calcular $\int \sqrt{3+2x-x^2}\,dx$ Esta integral se resuelve siguiendo el método indicado en página 301, mediante una sustitución trigonométrica Resulta

$$\int \sqrt{3+2x-x^2}\,dx = 2\left[\text{arc sen}\,\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}\right] + C$$

III) Otras integrales en las que aparecen raíces cuadradas de trinomios de 2º grado son las del tipo

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

y se calculan llevándolas a las formas estudiadas en II).

Haciendo $x = \frac{1}{z}$ la integral dada resulta

$$\int \frac{-\,dz}{\sqrt{a+bz+cz^2}}$$

Verifique el lector los siguientes resultados

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} + C.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\,\text{arc sen}\,\frac{1}{x} + C.$$

EJERCICIOS·

Verificar las siguientes integrales:

1. $$\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = -x + 4\sqrt{x} - 4\ln(1+\sqrt{x}) + C$$

2. $$\int \frac{dx}{2+3\sqrt{x}} = \frac{2}{3}\left[\sqrt{x} - \frac{2}{3}\ln(2+3\sqrt{x})\right] + C.$$

3. $$\int x^2\sqrt{x+1}\,dx = \frac{2}{105}(x+1)^{\frac{3}{2}}(15x^2-12x+8) + C$$

4 $$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\,dx = 2\,[\sqrt{x+1} - \text{arc tg}\,\sqrt{x+1}] + C.$$

5 $$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+4}} = -\frac{x^2}{8} + \frac{x}{8}\sqrt{x^2+4} + \frac{1}{2}\ln[x+\sqrt{x^2+4}] + C.$$

6 $$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} + C.$$

7 $$\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\,dx = (x+1) - 4\sqrt{x+1} + 4\ln(1+\sqrt{x+1}) + C$$

(Racionalícese)

8 $$\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}+1}\,dx = x - 2\sqrt{x} + \ln(1+\sqrt{x})^2 + \sqrt{x-x^2} +$$
$$+ \text{arc sen}\,\sqrt{x} - 2\sqrt{1-x} - 4\,\text{arc sen}\,\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{2}} + C.$$

(Hágase $\sqrt{x} = z$)

9 $$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\,\text{arc sen}\,x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$$

10. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}} = -\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{9+x^2}-3}{x} + C$$

Calcular las siguientes integrales (¹)·

1. $$\int \frac{dx}{\sqrt[7]{x^3}-\sqrt[7]{x}}$$

(Hágase $x = z^7$).

2. $$\int \frac{dx}{(x+3)^{\frac{1}{2}}-(x+3)^{\frac{3}{2}}}.$$

3. $$\int \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[4]{x+1}}\,dx$$

4. $$\int \frac{y^{\frac{2}{3}}\,dy}{y+1}.$$

(Hágase $z^3 = y$).

(¹) Los resultados se encuentran en las páginas 352-354.

5. $\int \frac{z^5\,dz}{\sqrt{1+z^3}}$.

6. $\int \frac{dy}{y^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{2}}}$.

7. $\int \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}-2}\,dx$.

8. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}+1}$

9. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1+x}}$.

10. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-1}\,dx$

11 $\int x\sqrt{1+x}\,dx$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$

13 $\int \frac{dx}{\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}}$

(Racionalícese el denominador).

14. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$.

15 $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

(Hágase la sustitución $x^2+1=t^2$).

16 $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}}$.

17. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$

18. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$

19 $\int \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{x\,(1+\sqrt[3]{x})}\,dx$.

20 $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x^{\frac{3}{4}}}\,dx$

21 $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt[3]{1+2x^3}}$.

22 $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

23. $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

24 $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+2x}}$.

25 $\int \sqrt{\frac{a-x}{x}}\,dx$.

26 $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+16)^{\frac{3}{2}}}$.

27. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$.

28 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}}$.

29. $\int \frac{t+2}{t\sqrt{t+1}}\,dt$.

30. $\int \frac{dx}{x\,(1-\sqrt[4]{x})}$.

31. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-4}}$.

32 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$.

33 $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{25+x^2}}$.

34 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$.

11. INTEGRACION DE DIFERENCIALES BINOMIAS

Se llama *diferencial binomia* a una expresión de la forma

$$x^m (a + bx^n)^p \, dx,$$

donde a y b son constantes cualesquiera y m, n y p números racionales.

EJEMPLO

$\dfrac{\sqrt{x}\, dx}{(1+\sqrt[3]{x})^{\frac{3}{2}}}$ es una diferencial binomia, con $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{3}$, $a = b = 1$ y $p = -\frac{3}{2}$.

Con la sustitución $x = z^\alpha$, donde α es el M.C.M. de los denominadores de los números racionales m y n, se puede hacer que en la correspondiente expresión en la variable z sólo subsista en forma fraccionaria el exponente p.

En efecto, si $x = z^\alpha$, $dx = \alpha z^{\alpha-1}\, dz$ y la diferencial binomia se transforma en

$$z^{m\alpha} (a + bz^{n\alpha})^p \alpha z^{\alpha-1}\, dz = \alpha z^{m\alpha+\alpha-1} (a + bz^{n\alpha})^p\, dz,$$

que tiene exponentes enteros para z.

En el ejemplo anterior hacemos $x = z^6$ y la diferencial se transforma en $6z^8 (1 + z^2)^{-\frac{3}{2}}\, dz$.

CASOS DE INTEGRACIÓN De acuerdo a este resultado sólo es necesario considerar las diferenciales binomias del tipo

$$x^m (a + bx^n)^p\, dx,$$

con m y n enteros y p fraccionario igual a $\frac{r}{s}$.

Veremos 3 casos de diferenciales binomias integrables elementalmente.

1°) En el caso particular de que sea p un número entero, esta diferencial binomia es integrable. En efecto, si p es un número natural, aplicando la fórmula del binomio de Newton la expresión se puede calcular con $p + 1$ términos de integración inmediata. Si p es entero negativo, se calcula de acuerdo a los métodos vistos para las funciones racionales.

2°) Si $\dfrac{m+1}{n}$ es un número entero, sustituyendo $a + bx^n = z^s$ re-

sulta $x = \left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$ y la diferencial binomia queda expresada así:

$$x^m (a + bx^n)^p \, dx = \left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} z^r \frac{1}{n}\left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{1-n}{n}} \frac{s}{b} z^{s-1} \, dz =$$

$$= \frac{s}{bn} z^{r+s-1}\left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} dz.$$

Como se ve, si $\frac{m+1}{n}$ es un número entero cualquiera, esta expresión es racional y, por lo tanto, integrable.

3°) Si $\frac{m+1}{n} + p =$ *número entero*, con la sustitución $a + bx^n = z^s x^n$, donde $p = \frac{r}{s}$, resulta $x^n (b - z^s) = -a$, o sea, $x^n = a(z^s - b)^{-1}$, y se tiene $x = a^{\frac{1}{n}} (z^s - b)^{-\frac{1}{n}}$. Reemplazando resulta

$$x^m (a + bx^n)^p \, dx =$$

$$= a^{\frac{m}{n}} (z^s - b)^{-\frac{m}{n}} \left[a + \frac{ba}{z^s - b}\right]^{\frac{r}{s}} (-1)\, a^{\frac{1}{n}} \frac{s}{n} (z^s - b)^{\frac{-1-n}{n}} z^{s-1} \, dz =$$

$$= -a^{\frac{m+1}{n} + \frac{r}{s}} \frac{s}{n} z^{r+s-1} (z^s - b)^{-\frac{m}{n} - \frac{r}{s} - \frac{1+n}{n}} dz,$$

y esta expresión es racional si el exponente de $(z^s - b)$, que es $-\left(\frac{m+1}{n} + \frac{r}{s} + 1\right)$, es entero, es decir, si se cumple la condición enunciada.

En el ejemplo antes considerado, como la expresión transformada en z era $6z^8 (1 + z^2)^{-\frac{8}{2}}$ y en ella se verifica $\frac{m+1}{n} + p = \frac{8+1}{2} - \frac{3}{2} = 3$, número en-

tero, la integral se resuelve haciendo $1 + z^2 = t^2 z^2$, resultando $z^2 (t^2 - 1) = 1$, es decir, $z = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}$ y $dz = -\frac{t\,dt}{(t^2 - 1)^{3/2}}$, y la diferencial binomia se transforma en $-6\frac{dt}{t^2 (t^2 - 1)^4}$ expresión fácilmente integrable. Reemplazando en el resultado obtenido t^2 por $\frac{1 + z^2}{z^2}$ y z por $x^{\frac{1}{6}}$ se obtiene la integral de la diferencial binomia en función de x

Hemos visto tres casos de integración de diferenciales binomias:

$$p = \text{entero}, \quad \frac{m + 1}{n} = \text{entero}, \quad \frac{m + 1}{n} + p = \text{entero}.$$

Hay un teorema notable de CHEBICHEV (1853) que asegura que estos tres son los *únicos* casos de diferenciales binomias que se pueden integrar con funciones elementales.

En la tabla anexa a este volumen damos las fórmulas generales que permiten reducir sucesivamente las integrales binomias.

EJEMPLO.

La integral considerada precedentemente

$$I = \int z^8 (1 + z^2)^{-3/2}\,dz,$$

se puede resolver utilizando sucesivamente 3 veces la primera y una vez la segunda de las fórmulas 78 de la página 63 del apéndice

En este caso es $m = 8$, $n = 2$, $p = \frac{3}{2}$, $a = 1$, $b = 1$ y resulta

$$I = \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}}\left[z^7 - \frac{7}{3} z^5 + \frac{35}{8} z^3 + \frac{105}{8} z \right] - \frac{105}{8} \operatorname{Arg\,Sh} z + C.$$

Reemplazando z por $x^{1/6}$ se tiene resuelta la integral que aparece en la página 328:

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1 + \sqrt[3]{x})^{3/2}}.$$

FUNCIONES INTEGRABLES Y NO INTEGRABLES ELEMENTALMENTE:

Se consideran como funciones elementales todas las que hemos estudiado en los capítulos III y IV: polinomios, fracciones racionales, exponenciales, logarítmicas, circulares e hiperbólicas. Con este "arsenal" de funciones no se pueden calcular expresiones de aspecto tan simple como

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx, \qquad \int \sqrt{1+x^3}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\,\text{sen}^2 x}} \qquad [1]$$

Pero, a su vez, estas expresiones pueden definir (a menos de una constante) nuevas funciones que, en la medida que sirvan para otros cálculos o estudios y que posean propiedades interesantes, se incorporarán al "arsenal" de las funciones utilizables.

Así, con la primera de las expresiones [1] se define una función denominada exponencial integral, $Ei(x)$ (1), y las otras se pueden expresar mediante las integrales elípticas que consideraremos más adelante.

12. INTEGRACION DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

En la tabla de integrales inmediatas ya han aparecido integrales de funciones trigonométricas. Otras expresiones más complicadas pueden llevarse al tipo de integrales racionales mediante sustituciones apropiadas

Consideraremos algunos tipos particulares, indicando en cada caso cómo pueden hacerse las generalizaciones correspondientes.

I) Calcular $I = \int \text{sen}^5 x\,dx$.

Escribiendo

$$\text{sen}^5 x\,dx = -\,\text{sen}^4 x \cdot d\,(\cos x) = -\,(1-\cos^2 x)^2\,d\,(\cos x)$$

y haciendo la sustitución $\cos x = t$ resulta

$$I = -\int (1 - 2t^2 + t^4)\,dt = -\,t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C =$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

Esta sustitución vale toda vez que se trate de una integral de los tipos

$$\int \text{sen}^n x\,dx, \qquad \int \cos^n x\,dx,$$

con n *impar* (en la segunda integral la sustitución será, evidentemente, $\text{sen}\,x = t$).

---

(1) La función $Ei(x)$ se caracteriza porque su derivada es $\frac{e^x}{x}$ y porque su valor es nulo para $x = -\infty$.

II) También se calculará en forma análoga cualquier integral del tipo

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx,$$

siendo m y n números naturales y uno de ellos *impar*.

$$\text{Así, } \int \operatorname{sen}^6 x \cos^5 x \, dx = \int \operatorname{sen}^6 x \cdot \cos^4 x \, d(\operatorname{sen} x) =$$

$$= \int \operatorname{sen}^6 x \, (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \, d(\operatorname{sen} x) =$$

$$= \int t^6 (1 - t^2)^2 \, dt = \int (t^6 - 2t^8 + t^{10}) \, dt =$$

$$= \frac{t^7}{7} - \frac{2}{9} t^9 + \frac{1}{11} t^{11} + C = \frac{1}{7} \operatorname{sen}^7 x - \frac{2}{9} \operatorname{sen}^9 x + \frac{1}{11} \operatorname{sen}^{11} x + C.$$

III) Todas las integrales del tipo $\int \operatorname{tg}^n x \, dx$, con n entero, par o impar, se resuelven con la sustitución $\operatorname{tg} x = z$, pues entonces es $x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} z$, $dx = \dfrac{dz}{1 + z^2}$ y la integral toma la forma $\displaystyle\int \frac{z^n}{1 + z^2} \, dz$, que por ser racional se puede integrar en todos los casos.

EJEMPLO: Calcular $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$. Con $z = \operatorname{tg} x$ resulta

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \int \frac{z^3}{1 + z^2} \, dz = \int \left(z - \frac{z}{1 + z^2} \right) dz = \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{2} \ln (1 + z^2) + C =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{2} \ln (1 + \operatorname{tg}^2 x) + C = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln (\cos x) + C.$$

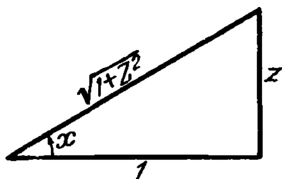


FIG X-3

IV) Todas las integrales del tipo $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$, con $m + n = 2k$ (k entero, positivo o negativo) se integran con la sustitución $\operatorname{tg} x = z$.

Para expresar $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ en función de $\operatorname{tg} x$ lo mejor es construir un triángulo rectángulo en el cual al cateto opuesto al ángulo agudo x le corresponde el valor z, al cateto adyacente el valor 1 y, por consiguiente, aplicando el teorema de Pitágoras, a la hipotenusa el valor $\sqrt{1 + z^2}$. De acuerdo a la figura 3 resulta

$$\operatorname{sen} x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}, \qquad [1]$$

y de $x = \operatorname{arc\,tg} z$ se deduce $dx = \dfrac{dz}{1+z^2}$. [2]

La integral es entonces

$$\int \operatorname{sen}^m x \cdot \cos^n x\, dx = \int \frac{z^m}{(1+z^2)^{k+1}}\, dz,$$

que siempre se puede calcular por tratarse de una expresión racional.

EJEMPLO Calcular $I = \displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^5 x}{\cos^3 x}\, dx.$

Con $\operatorname{tg} x = z$ y las transformaciones [1] y [2] se obtiene

$$I = \int \frac{z^5}{(1+z^2)^2}\, dz = \int \left[z - \frac{2z^3+z}{(1+z^2)^2} \right] dz = \int \left[z - \frac{2z(z^2+1)-z}{(1+z^2)^2} \right] dz =$$

$$= \int \left[z + \frac{z}{(1+z^2)^2} - \frac{2z}{1+z^2} \right] dz = \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{1+z^2} - \ln(1+z^2) + C =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{2} \cos^2 x + \ln(\cos^2 x) + C.$$

TEOREMA GENERAL Si la expresión subintegral es una combinación de sumas, restas, productos (potencias) y cocientes de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, o, en otros términos, si es una función racional $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ de sus argumentos, se puede calcular la integral mediante la sustitución

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} x = z.$$

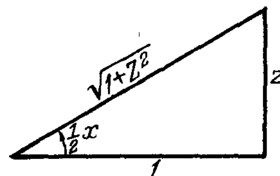


FIG X-4

En efecto, de acuerdo a las notaciones de la figura 4 es

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}, \quad \cos \frac{1}{2} x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$

y, por consiguiente,

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x = \frac{2z}{1+z^2}, \qquad [1]$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{1}{2} x - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} x = \frac{1-z^2}{1+z^2}. \qquad [2]$$

$$\frac{1}{2}x = \operatorname{arc\,tg} z, \quad dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}. \qquad [3]$$

Resulta entonces

$$\int R\,(\operatorname{sen} x,\ \cos x)\,dx = 2\int R\left[\frac{2z}{1+z^2},\ \frac{1-z^2}{1+z^2}\right]\frac{dz}{1+z^2},$$

que es la integral de una función racional.

EJEMPLOS

1º) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$. Esta integral ya ha sido calculada empleando un artificio en la página 297 Ahora la resolveremos empleando la sustitución general $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = z$ y las transformaciones [1] y [3]

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{1+z^2}{2z}\,\frac{2\,dz}{1+z^2} = \int \frac{dz}{z} = \ln z + C = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right) + C$$

2º) $\int \frac{dx}{\cos x}$. Aunque esta integral se puede calcular reemplazando en la anterior x por $x + \frac{1}{2}\pi$, aplicaremos ahora la sustitución general $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = z$ y las transformaciones [2] y [3]

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{1+z^2}{1-z^2}\,\frac{2\,dz}{1+z^2} = 2\int \frac{dz}{1-z^2} = 2\operatorname{Arg\,Th} z + C = \ln\frac{1+z}{1-z} + C =$$

$$= \ln\frac{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}x} + C = \ln\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{4}\pi + \operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{4}\pi\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{2}x} + C = \ln\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right) + C.$$

EJERCICIOS

Verificar las siguientes integrales:

1. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\,dx = \frac{1}{5}\cos^5 t - \frac{1}{3}\cos^3 t + C.$

2. $\int \operatorname{tg}^2 4\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\operatorname{tg} 4\theta - \theta + C$ 3. $\int \frac{\cos 2t}{\operatorname{sen}^4 2t}\,dt = -\frac{1}{6}\operatorname{cosec}^3 2t + C.$

4. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^2 x}\,dx = \cos x + \sec x + C.$

5. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x} = -\frac{1}{3}\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x} - \frac{2}{3}\operatorname{cotg} x + C$

6. $\int \cos^4 x\cdot\operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} + \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48} + C.$

7. $\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} x} = \operatorname{tg} x + \sec x + 1 + C.$

8 $\int \frac{dx}{4 + 5 \cos x} = \frac{1}{3} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} x + 3}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} x - 3} + C.$

9. $\int \frac{\cos x}{2 - \cos x} dx = \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{1}{2} x\right) - x + C.$

10. $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x + \cos x} = \ln \left(1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} x\right) + C$

Calcular las siguientes integrales (1)

1. $\int \operatorname{sen}^5 \frac{x}{6} \cos \frac{x}{6} dx.$

2 $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x} dx.$

3 $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x \, dx.$

4 $\int \operatorname{cotg}^3 x \, dx$

5 $\int \operatorname{sen}^2 y \cos^2 y \, dy.$

6 $\int \frac{dx}{\cos^6 x}.$

7. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^7 x} dx$

8 $\int \operatorname{sen}^8 x \, dx$

9 $\int \operatorname{tg}^5 \frac{1}{2} x$

10 $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^3 x} dx.$

11 $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x \cdot \cos^3 x}.$

12 $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x - \cos x}.$

13 $\int \frac{dx}{\cos x + \operatorname{tg} x}.$

14 $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x}.$

15 $\int \frac{dx}{3 - 2 \cos x}.$

16 $\int \frac{dx}{2 \cos x + \operatorname{sen} x - 3}.$

17. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{2 + 3 \cos x} dx.$

18 $\int \frac{dx}{1 + 2 \operatorname{sen} x}.$

19 $\int \frac{\operatorname{sen} x}{2 - 3 \operatorname{sen} x}.$

20 $\int \frac{dx}{4 \operatorname{sen} x + 3 \cos x + 13}.$

21. $\int \frac{dx}{4 \sec x + 5}.$

(1) Los resultados se encuentran en las páginas 354-355

13. INTEGRACION DE PRODUCTOS DE SENOS Y COSENOS

La integración de expresiones del tipo

$$\operatorname{sen} mx \cdot \operatorname{sen} nx,$$
$$\cos mx \cdot \cos nx,$$
$$\operatorname{sen} mx \cos nx,$$

con m y n números naturales, se hace teniendo en cuenta las fórmulas trigonometricas del apéndice, en virtud de las cuales los productos se transforman en sumas de senos y cosenos

Así resulta para $m \neq n$

$$\int \operatorname{sen} mx \cdot \cos nx\, dx = \frac{1}{2} \int [\operatorname{sen} (m+n) x + \operatorname{sen} (m-n) x]\, dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos (m+n) x}{m+n} + \frac{\cos (m-n) x}{m-n}\right] + C.$$

Verifique el lector las integrales análogas

$$\int \operatorname{sen} mx \cdot \operatorname{sen} nx\, dx = -\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(m+n) x}{m+n} + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(m-n) x}{m-n} + C,$$
$$\int \cos mx \cdot \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(m+n) x}{m+n} + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(m-n) x}{m-n} + C.$$

En el caso $m = n$ resultan expresiones que ya se han integrado anteriormente

Para la integral de productos de senos y cosenos hiperbólicos se procede en la misma forma utilizando las tablas del apéndice

Ejercicios

Verificar las siguientes integrales

1 $\displaystyle\int \operatorname{sen} 3x \cos 4x\, dx = \frac{-1}{14}\cos 7x + \frac{1}{2}\cos x + C$

(Téngase en cuenta que $\operatorname{sen} 3x \cdot \cos 4x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 7x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$)

2 $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} 2x\, dx = -\frac{1}{6}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + C$

3 $\displaystyle\int \cos 3x \cdot \cos 2x\, dx = \frac{1}{10}\operatorname{sen} 5x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + C$

Calcular las siguientes integrales [1]

1 $\displaystyle\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x\, dx$

2 $\displaystyle\int \cos (2x+3) \cos (1-2x)\, dx$

[1] Los resultados se encuentran en la página 355

3 $\int \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) dx$

4 $\int \cos 2x \cos (3x - 4)\, dx$

5 $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 5x\, dx$

6 $\int \operatorname{sen}^2 2x \operatorname{sen}^2 3x\, dx$

7. $\int \cos^2 3x \cos 5x\, dx$

8 $\int \operatorname{Sh} 3x \operatorname{Sh} 2x\, dx$

9 $\int \operatorname{Sh} 2x \operatorname{Ch} x\, dx$

10 $\int \operatorname{Ch} 5x \operatorname{Ch} 2x\, dx$

FÓRMULAS DE REDUCCIÓN· Si bien la expresión

$$I_{m,n} = \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx,$$

con m y n enteros (positivos o negativos), es una expresión racional de senos y cosenos y, por consiguiente, es integrable mediante la sustitución $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = z$, es posible aplicar fórmulas de reducción que conduzcan a integrales con los exponentes 0, 1 y -1, cuya solución sea inmediata.

Para ello habrá que contar con 4 fórmulas dos que permitan disminuir m o n cuando estos exponentes sean positivos y dos que permitan aumentar estos exponentes cuando sean negativos.

Si en la expresión

$$I_{m,n} = \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx = -\frac{1}{n+1}\int \operatorname{sen}^{m-1} x\, d\,(\cos^{n+1} x)$$

aplicamos la fórmula de integración por partes, obtenemos

$$I_{m,n} = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cdot \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \operatorname{sen}^{m-2} x \cdot \cos^{n+2} x\, dx. \quad [1]$$

Puesto que es

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^{m-2} x \cdot \cos^{n+2} x &= \operatorname{sen}^{m-2} x \cdot \cos^n x \cdot \cos^2 x = \\ &= \operatorname{sen}^{m-2} x \cdot \cos^n x\,(1 - \operatorname{sen}^2 x) = \\ &= \operatorname{sen}^{m-2} x \cdot \cos^n x - \operatorname{sen}^m x \cdot \cos^n x,\end{aligned}$$

la integral del 2º miembro de [1] se descompone en 2, de las cuales la segunda es precisamente $I_{m,n}$ Pasando esa expresión al primer miembro resulta

$$I_{m,n}\left(1 + \frac{m-1}{n+1}\right) = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cdot \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} I_{m-2,n},$$

es decir, si $m + n \neq 0$,

$$I_{m,n} = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x\ \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}. \quad [I]$$

Si escribimos la expresión subintegral en la forma

$$\operatorname{sen}^m x \cdot \cos^n x\, dx = \operatorname{sen}^m x \cdot d\,(\operatorname{sen} x)\, \cos^{n-1} x =$$

$$= \frac{1}{m+1} \cos^{n-1} x \cdot d\,(\operatorname{sen}^{m+1} x)$$

e integramos por partes, obtenemos —después de reemplazar un factor $\operatorname{sen}^2 x$ por $(1 - \cos^2 x)$—, procediendo en la misma forma que en el cálculo anterior,

$$I_{m,n} = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cdot \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}. \qquad [II]$$

Si en [I] reemplazamos m por $m+2$ sin alterar n, y en [II] reemplazamos n por $n+2$ sin alterar m, obtenemos, sucesivamente,

$$I_{m+2,n} = -\frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \ \cos^{n+1} x}{m+n+2} + \frac{m+1}{m+n+2} I_{m,n},$$

$$I_{m,n+2} = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cdot \cos^{n+1} x}{m+n+2} + \frac{n+1}{m+n+2} I_{m,n},$$

fórmulas que también podemos escribir, si $m+1 \neq 0$,

$$I_{m,n} = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cdot \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} I_{m+2,n}; \qquad [III]$$

si $n+1 \neq 0$,

$$I_{m,n} = -\frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cdot \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} I_{m,n+2} \qquad [IV]$$

La aplicación reiterada de las fórmulas [I], [II], [III] y [IV], con las restricciones que hemos impuesto a los exponentes, permite resolver cualquier integral $I_{m,n}$

EJEMPLOS

1°) Calcular $I = \int \operatorname{sen}^4 x\, dx.$

Aquí es $m = 4$ y $n = 0$. Aplicando la fórmula [I]:

$$I = -\frac{\operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x}{4} + \frac{3}{4}\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = -\frac{1}{4}\operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x + \frac{3}{8}(x - \operatorname{sen} x \cdot \cos x) + C$$

NOTA

Esta integral también se podría resolver recordando que por ser $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ resulta $\operatorname{sen}^4 x = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)$, y todas las integrales que aparecen ahora han sido calculadas anteriormente.

2°) Calcular $I = \int \frac{\operatorname{sen}^6 x}{\cos^4 x} dx = I_{6,-4}.$

En virtud de [I] y [IV], aplicadas sucesivamente, obtenemos

$$I_{6,-4} = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}^5 x \cdot \cos^{-3} x + \frac{5}{2} I_{4,-4} = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}^5 x \cdot \cos^{-3} + \\ + \frac{5}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}^5 x \cdot \cos^{-3} x}{3} - \frac{2}{3} I_{4,-2}\right).$$

Aplicando a $I_{4,-2}$ nuevamente [I] y [IV]

$$I_{4,-2} = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}^3 x \cdot \cos^{-1} x + \frac{3}{2} I_{2,-2} = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}^3 x \cdot \cos^{-1} x + \\ + \frac{3}{2}(\operatorname{sen}^3 x \cdot \cos^{-1} x + 2 I_{2,0}).$$

Como es $I_{2,0} = \int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x \cdot \cos x)$, resulta

$$\int \frac{\operatorname{sen}^6 x}{\cos^4 x} dx = \frac{1}{3}\frac{\operatorname{sen}^5 x}{\cos^3 x} - \frac{5}{3}\frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x} - \frac{5}{2}(x - \operatorname{sen} x \cdot \cos x) + C.$$

EJERCICIOS

Verificar las siguientes formulas de reducción.

1 $I_n = \int \operatorname{sen}^n x \, dx = -\frac{\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$

2 $I_n = \int \cos^n x \, dx = \frac{\operatorname{sen} x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

3 $I_n = \int \operatorname{tg}^n x \, dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}.$

4 $I_n = \int \operatorname{cotg}^n x \, dx = -\frac{\operatorname{cotg}^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}$

5 $I_n = \int \sec^n x \, dx = \frac{\sec^{n-2} x \operatorname{tg} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}.$

6. $I_n = \int \operatorname{cosec}^n x \, dx = -\frac{\operatorname{cosec}^{n-2} x \operatorname{cotg} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}.$

7 Resolver

$$I_n = \int x^n \operatorname{arc\,sen} x \, dx \quad (n \text{ entero y positivo})$$

Solución Integrando por partes, con $u = \operatorname{arc\,sen} x$ y $dv = x^n dx$, resulta

$$I_n = \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{arc\,sen} x - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Haciendo $x = \operatorname{sen} z$ en la última integral, se tiene

$$\int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{\operatorname{sen}^{n+1} z}{\cos z}\cos z \, dz = \int \operatorname{sen}^{n+1} z \, dz.$$

y ésta se resuelve por recurrencia, como se vió en el ejercicio Nº 1.

14. DETERMINACION DE LA CONSTANTE DE INTEGRACION

Al calcular la integral indefinida de una función dada aparece una constante de integración que se puede calcular cuando se impone alguna condición suplementaria.

Así, si se trata de determinar entre todas las curvas con subtangente constantemente igual a 1 la que pasa por el punto $P(0, 1)$, procedemos en la siguiente forma·

1º) Determinación de *todas* las curvas de subtangente igual a 1.

Por ser $S_t = \frac{y}{y'}$ debe ser $\frac{y'}{y} = 1$, o sea, $\frac{dy}{y} = dx$

Integrando los dos miembros se tiene $\ln y = x + C$, es decir,

$$y = e^{C+x}. \qquad [1]$$

2º) De las infinitas soluciones así logradas hay que determinar aquella que pase por el punto $P(0, 1)$. Debiendo ser, de acuerdo a [1], $1 = e^C$, resulta $C = 0$

Luego, la *única* curva de subtangente constantemente igual a 1 que pasa por el punto $P(0, 1)$ es la exponencial $y = e^x$.

EJERCICIOS

1 Determinar la curva cuya pendiente en el punto (x, y) es $3x^2$ si debe pasar por el punto $P(1, -1)$

Solución Se trata de resolver la *ecuación diferencial* $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ con las *condiciones iniciales* $y = -1$ cuando $x = 1$

Escribimos $dy = 3x^2\,dx$ e, integrando miembro a miembro, resulta

$$y = x^3 + C \qquad [2]$$

Para calcular C aplicamos las condiciones iniciales

$$-1 = 1^3 + C, \quad C = -2$$

Sustituyendo el valor de C en la ecuación general [2] obtenemos la curva particular que pasa por el punto dado

$$y = x^3 - 2$$

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de condiciones iniciales dadas

2 $\frac{dy}{dx} = 4x$, $P(2, 3)$. R $y = 2x^2 - 5$

3. $\frac{dy}{dx} = 1 - x^2$, $P(1, 2)$ R $3y = 3x - x^3 + 4$

4. $\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 2x$, $P(0, 2)$. R. $y = 2x^3 - x^2 + 2$.

5 $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{x}}$, $P(4, 4)$. R $y = 4\sqrt{x} - 4$.

6 $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$, $P(3, 1)$. R $3xy = 3 + 2x$

7 $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{1 + x^2}$, $P(0, -3)$. R $(3y + 10)^2 = (1 + x^2)^3$.

8 $\frac{dy}{dx} = x^2\sqrt{y}$, $P(1, 4)$. R $6y^{\frac{1}{2}} = x^3 + 11$

9 $\frac{dy}{dx} = 2xy^2$, $P(1, 1)$. R $y(2 - x^2) = 1$.

Significación física de la constante de integración. Hemos visto (pág. 193) que la *velocidad* de un punto que se mueve sobre una recta según una ley $s = f(t)$ está dada, en cada instante, por la derivada $f'(t)$, mientras que la *aceleración* está dada por $f''(t)$.

Si, inversamente, el dato conocido es la velocidad o la aceleración, al establecer la ecuación del movimiento aparecerán 1 ó 2 constantes de integración, que habrá que determinar de acuerdo a las condiciones iniciales del problema

Así, por ejemplo, si la aceleración a de un movimiento rectilíneo es constante, es decir, si

$$f''(t) = a, \quad \text{siendo } a \text{ constante,}$$

integrando resulta la velocidad v.

$$v = f'(t) = at + d,$$

siendo d la constante de integración. El significado físico de d es inmediato, pues para $t = 0$ resulta la velocidad inicial v_0 $v_0 = d$, y se podrá escribir

$$v = at + v_0 = f'(t).$$

Integrando esta expresión se tiene la ley del movimiento

$$f(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + d',$$

siendo d' una nueva constante, que se determina con la condición de que en el instante inicial ($t = 0$) el espacio es igual a s_0: $s_0 = d'$.

La ley del movimiento es entonces

$$s = f(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0.$$

Ejercicios

Determinar la posición s en función de t dada la velocidad $v = \frac{ds}{dt}$. Calcular la constante de integración de manera que sea $s = s_0$ cuando $t = 0$

1 $v = 3t^2$ R $s = t^3 + s_0$

2 $v = (t+1)^2$ R $s = \frac{1}{3}(t+1)^3 - \frac{1}{3} + s_0$

3 $v = (t+1)^{-2}$ R $s = -(t+1)^{-1} + 1 + s_0$

4 $v = (t^2+1)^2$ R $s = \frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + t + s_0.$

5 $v = \sqrt{t}$ R $s = \frac{2}{3}t \; t^{\frac{1}{2}} + s_0$

Determinar la velocidad v y la posición s como funciones de t dada la aceleración $a = \frac{dv}{dt}$. Calcular la constante de integración teniendo en cuenta que para $t = 0$ es $s = s_0$ y $v = v_0$

6 $a = \sqrt[3]{2t+1}$ R $v = \frac{3}{8}(2t+1)^{\frac{4}{3}} + v_0 - \frac{3}{8},$

$s = \frac{9}{112}(2t+1)^{\frac{7}{3}} + v_0 - \frac{3}{8} \; t + s_0 - \frac{9}{112}.$

7 $a = (2t+1)^{-3}$ R $v = -\frac{1}{4}(2t+1)^{-2} + v_0 + \frac{1}{4},$

$s = \frac{1}{8}(2t+1)^{-1} + \left(v_0 + \frac{1}{4}\right)t + s_0 - \frac{1}{8}.$

8 $a = t$ R $v = \frac{1}{2}t^2 + v_0, \; s = \frac{1}{6}t^3 + v_0 t + s_0$

9 $a = -32$ R $v = -32t + v_0, \; s = -16t^2 + v_0 t + s_0$

10 $a = 12t^2$ R $v = 4t^3 + v_0, \; s = t^4 + v_0 t + s_0$

SOLUCIONES DE LAS INTEGRALES INDEFINIDAS

Respuestas del § 2 (págs 278-279)

1 $\frac{1}{9}(2+3x)^3 + C$ 2. $\frac{1}{4}x^2(2+x^2) + C.$

3 $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{8}{3}} + \frac{32}{17}x^{\frac{17}{6}} - \frac{64}{81}x^3 + C.$ 4 $\frac{1}{7}z^7 - 2z - \frac{1}{5}z^{-5} + C$

5. $\frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x} + C.$

6 $2x^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{3}x\right) + C.$

7. $\ln z + \frac{2}{3}\frac{1}{z^3} + C.$

8. $\frac{5}{8}x\sqrt[5]{ax^3} + C.$

9. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x\sqrt{ax} + ax + C$

10. $\frac{2}{3}(\sqrt{x} + \sqrt{a})^3 + C$

11 $-\frac{1}{4}\frac{1}{(1+2x^2)^3} + C.$

12 $\sqrt{x^2 - 2x} + C$

13. $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots + \frac{1}{2m-1}x^{2m-1} + C$

14. $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \quad + \frac{1}{m}x^m + C$

Respuestas del § 3 (págs. 287-289)

1. $\frac{1}{6}(3 + 4x)^{\frac{3}{2}} + C.$

2. $-\frac{1}{2}\sqrt{3 - 4x} + C$

3 $\frac{1}{2}\frac{1}{5 - 2x} + C.$

4. $-\frac{1}{40}(1 - 2x^2)^{10} + C.$

5 $-\sqrt{6x - x^2} + C.$

6 $\frac{1}{2b^2}\left(\frac{a}{2(a + bx^2)^2} - \frac{1}{a + bx^2}\right) + C.$

7. $a e^{ax} + C.$

8 $x - e^{-x} + C.$

9 $-\frac{1}{a^{nx}\cdot\ln a} + C$

10. $\frac{e^{2n\theta}}{2n} + C.$

11. $-\frac{2}{n}\sqrt{1 - e^{nx}} + C.$

12 $\ln(x^5 + x) + C$

13 $-\frac{1}{2}\ln(6x - x^2) + C.$

14 $-\frac{1}{4}\ln(7 - 2z^2) + C$

15 $\frac{1}{6}\ln(3 + 2x^3) + C$

16. $7\ln(x + 3) - 2x + C.$

17 $-2\ln(1 - x) - x + C$

18 $\frac{1}{2}x^2 + x + \ln(x - 1)^2 + C.$

19. $x^2 + \frac{7}{2}\ln(x^2 - 3) + C$

20 $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$

21. $-\ln(1 - e^x) + C.$

22 $\ln(1 + e^x) + C$

23 $-\ln(2 - \operatorname{tg} x) + C.$

24 $\frac{1}{3}(a + \ln x)^3 + C.$

25. $-\frac{1}{3}\cos 3x + \cos x + C$

26. $\frac{2}{5}\operatorname{tg}\frac{5}{2}x + C.$

27. $-\frac{1}{3}\operatorname{cotg}(3x+2) + C$

28 $3\operatorname{tg}\frac{1}{3}x + C$

29 $\frac{1}{5}\operatorname{tg} 5x - x + C.$

30 $2(\operatorname{tg} x - \sec x) - x + C$

31. $\operatorname{tg} x + 2\ln\cos x + C$

32 $\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + C$

33 $\ln(\operatorname{sen} x) + C$

34 $\frac{1}{4}\operatorname{tg}(x^4) + C$

35 $-\frac{1}{2}\operatorname{cotg} 2x + C$

36 $-\frac{1}{2}(3 - 4\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{2}} + C.$

37 $-\frac{1}{n}\ln(\cos na) + C$

38 $2\sqrt{1-\cos x} + C$

39. $\ln(x - \cos x) + C.$

40 $2\sqrt{1-\operatorname{cotg} z} + C.$

41. $-\frac{1}{n}\ln(2+\cos nx) + C.$

42 $-\operatorname{cotg} x - 2\ln(\operatorname{sen} x) + C.$

43 $\frac{1}{2}\sec 2x + C$

44 $-\ln(\cos e^x) + C.$

45 $-\frac{1}{3}\ln(\cos 3\theta) + C$

46 $\ln(1+\operatorname{tg} x) + C$

47 $2(\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x) - x + C$

48 $2(\operatorname{tg} x + e^x)^{\frac{1}{2}} + C.$

49 $\frac{1}{an}\ln(a\sec nx - b) + C$

50 $-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^4 2x + C$

51 $\frac{1}{2}\sqrt{1+2\operatorname{tg} 2a} + C.$

52 $\operatorname{tg} x - \sec x + C$

53 $\operatorname{sen} x\left(1 - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^2 x\right) + C$

54 $2\cos\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{3}\cos^2\frac{1}{2}x - 1\right) + C$

55 $2\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x + 1\right) + C$

56 $-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 x - \ln(\operatorname{sen} x) + C.$

57 $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln(\cos x) + C$

58 $\frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C$

59 $-\frac{1}{5}\operatorname{cotg}^5 x + C$

60 $-\frac{1}{7}\operatorname{cotg}^7 x - \frac{1}{5}\operatorname{cotg}^5 x + C.$

61 $\frac{1}{a}\operatorname{Sh}(ax+b) + C$

62 $-\operatorname{Th}(1-x) + C$

63. $-\frac{1}{2}\text{Cth}\,(2x+1)+C.$

64. $-\frac{1}{2}\text{Sech}\,2x+C.$

65. $-\frac{1}{n}\text{Cosech}\,nx+C.$

66. $\frac{1}{2n}\text{sen}^2\,n\alpha+C_1=-\frac{1}{2n}\cos^2 n\alpha+C_2=-\frac{1}{4n}\cos 2n\alpha+C_3$

67. $-\frac{1}{3n}\cos^3 n\alpha+C.$

68. $\frac{1}{6}\text{Ch}^3\,2x+C.$

69. $\ln\,(1+\text{Sh}\,x)+C.$

70. $\frac{1}{3}e^{\text{Th}\,3x}+C.$

Respuestas del § 4 (págs. 292-293):

1. $\frac{1}{5}\text{arc tg}\,\frac{1}{5}x+C.$

2 $\frac{1}{6}\text{arc tg}\,\frac{3}{2}x+C.$

3. $\frac{1}{\sqrt{15}}\text{arc tg}\,\sqrt{\frac{3}{5}}x+C.$

4. $\frac{1}{6}\text{arc tg}\,\frac{2}{3}x+C.$

5. $\frac{1}{\sqrt{6}}\text{arc tg}\,\sqrt{\frac{3}{2}}x+C.$

6 $\frac{1}{3}\text{arc tg}\,\frac{1}{3}x^4+C$

7 $\frac{1}{a}\text{arc tg}\,\frac{x+b}{a}+C.$

8 $\text{arc tg}\,e^x+C.$

9 $\frac{1}{\sqrt{5}}\text{arc tg}\,\frac{3x-1}{\sqrt{5}}+C.$

10 $\frac{1}{3}\text{Arg Th}\,\frac{x-4}{3}+C$

11. $2\,\text{Arg Th}\,(2x-3)+C.$

12 $\frac{1}{4}\text{arc tg}\,\frac{1}{4}(x+1)+C.$

13. $-\frac{2}{\sqrt{5}}\text{Arg Th}\,\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C.$

14 $\frac{1}{2}\text{arc tg}\,(2x-3)+C$

15 $-\frac{1}{2}\text{arc tg}\,\frac{1}{2}(x-1)+C.$

16 $-\text{Arg Th}\,(x+2)+C.$

17 $-\text{Arg Th}\,(x+3)+C.$

18. $2\ln\,(x^2+2x+5)+3\,\text{arc tg}\,\frac{1}{2}(x+1)+C.$

19. $\ln\,(4x^2-4x-3)+\text{Arg Th}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C.$

20 $-\text{Arg Th}\,(x+1)+C.$

21. $\ln\,(x^2+2x+2)+\text{arc tg}\,(x+1)+C$

22. $-\frac{1}{2}\ln\,(x^2-4x)+2\,\text{Arg Th}\left(\frac{1}{2}x-1\right)+C$

23 $\frac{1}{2}\ln(2x^2+2x+1) + 4\operatorname{arc\,tg} 2\left(x+\frac{1}{2}\right) + C$

24 $x + \ln(x^2 - x - 1) - \frac{6}{\sqrt{5}}\operatorname{Arg\,Th}\frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C.$

RESPUESTAS DEL § 5 (pág. 295)

1 $\operatorname{arc\,sen}(x-2) + C$

2 $\operatorname{arc\,sen}(x-1) + C.$

3 $\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{2}(x-1) + C$

4 $-\sqrt{2x-x^2} + 2\operatorname{arc\,sen}(x-1) + C$

5 $\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,sen}\sqrt{\frac{3}{2}}x + C$

6 $\operatorname{arc\,sen}(2x-1) + C.$

7. $\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{4}(x+3) + C.$

8 $\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{2}{5}x - 1\right) + C$

9 $\operatorname{Arg\,Ch}\frac{1}{3}x + C = \ln(x + \sqrt{x^2-9}) + C'.$

10 $\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{Arg\,Sh}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right) + C = \frac{\sqrt{3}}{3}\ln(\sqrt{3}x + \sqrt{3x^2+2}) + C'.$

11. $\operatorname{Arg\,Ch}\frac{x-1}{3} + C = \ln(x - 1 + \sqrt{x^2-2x-8}) + C'.$

12 $\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{Arg\,Sh}\frac{3x+1}{\sqrt{2}} + C = \frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left(\frac{3x+1}{\sqrt{3}} + \sqrt{1+2x+3x^2}\right) + C'.$

13 $\operatorname{arc\,sen}(x+2) + C$

14 $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{Arg\,Sh}\sqrt{\frac{2}{3}}(x-1) + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln[\sqrt{2}(x-1) + \sqrt{2x^2-4x+5}] + C'.$

15 $\operatorname{Arg\,Sh}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C = \ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right) + C'$

16 $-\sqrt{5+4x-x^2} + 2\operatorname{arc\,sen}\frac{x-2}{3} + C.$

17 $-4\sqrt{x^2-4} - \operatorname{arc\,sen}\frac{1}{2}x + C$

18 $\sqrt{x^2-4x+3} + \operatorname{Arg\,Ch}(x-2) + C$

19 $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2-6x+4} + \frac{5}{4}\sqrt{2}\operatorname{Arg\,Ch}(2x-3) + C.$

20 $\sqrt{x^2+4x+5}-2\,\mathrm{Arg\,Sh}\,(x+2)+C.$

21 $\sqrt{x^2+2x}+2\,\mathrm{Arg\,Ch}\,(x+1)+C.$

22. $\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4x+2}-\mathrm{Arg\,Sh}\,(2x+1)+C.$

23 $-\frac{1}{4}\sqrt{1+4x^2}+\frac{1}{2}\mathrm{Arg\,Sh}\,2x+C.$

24 $2\sqrt{x^2-1}+3\,\mathrm{Arg\,Ch}\,x+C.$

25 $\frac{1}{2}\mathrm{Arg\,Ch}\,\frac{2x^2-1}{\sqrt{5}}+C.$

Respuestas del § 6 (pág 302).

1. $\frac{1}{2}x\sqrt{9-4x^2}+\frac{9}{4}\,\mathrm{arc\,sen}\,\frac{2}{3}x+C.$

2. $\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-b^2x^2}+\frac{a^2}{2b^2}\,\mathrm{arc\,sen}\,\frac{b}{a}x+C.$

3. $\frac{1}{2}x\sqrt{4+7x^2}+\frac{4}{14}\sqrt{7}\,\mathrm{Arg\,Sh}\,\frac{\sqrt{7}}{2}x+C.$

4. $\frac{1}{2}(x+2)\sqrt{5-4x-x^2}+\frac{9}{2}\,\mathrm{arc\,sen}\,\frac{x+2}{3}+C.$

5. $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-8}-\frac{9}{2}\,\mathrm{Arg\,Ch}\,\frac{x-1}{3}+C.$

6 $\frac{1}{2}(x-2)\sqrt{x^2-4x}-2\,\mathrm{Arg\,Ch}\,\frac{1}{2}(x-2)+C.$

7 $\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{3-2x-x^2}+2\,\mathrm{arc\,sen}\,\frac{1}{2}(x+1)+C.$

Respuestas del § 7 (págs 306-307):

1. $x\,\mathrm{arc\,cos}\,\frac{1}{x}-\mathrm{Arg\,Ch}\,x+C.$

2 $\frac{2}{17}e^{2x}\left[4\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}x-\cos\frac{1}{2}x\right]+C.$

3 $-\frac{1}{2}e^{-2x}+2e^{-x}(x+1)+\frac{1}{3}x^3+C.$

4. $\frac{1}{2}(x^2+1)\,\mathrm{arc\,cotg}\,x+\frac{1}{2}x+C.$

5. $x\ln(x^2+1)-2x+2\,\mathrm{arc\,tg}\,x+C.$

6 $-e^{-x}(x^2+2x+2)+C$

7 $\frac{1}{4}(1-2x^2)\cos 2x+\frac{1}{2}x \operatorname{sen} 2x+C.$

8 $-\left(1+\frac{1}{x}\right)\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}+C.$

9 $-\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{9}x\operatorname{sen}3x+\frac{2}{27}\cos 3x+C$

10 $(1+x)\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$

11 $\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\left[\ln(x+1)-\frac{2}{3}\right]+C.$

12 $\frac{2}{17}e^{2x}\left[\operatorname{sen}\frac{1}{2}x+4\cos\frac{1}{2}x\right]+C.$

13 $\frac{1}{2}\ln(\sec x+\operatorname{tg}x)+\frac{1}{2}\sec x\cdot\operatorname{tg}x+C$

14 $-\frac{1}{4}\ln(\operatorname{cosec}2x+\operatorname{cotg}2x)-\frac{1}{4}\operatorname{cosec}2x\cdot\operatorname{cotg}2x+C.$

15 $\frac{x}{x+1}\ln x-\ln(x+1)+C.$

16 $-e^{-x}(x^5+5x^4+20x^3+60x^2+120x+120)+C.$

17 $-\frac{1}{4}x\ \ \cos 2x+\frac{1}{8}\operatorname{sen}2x+C.$

18\. $\frac{n\operatorname{sen}mx\cdot\cos nx-m\cos mx\cdot\operatorname{sen}nx}{m^2-n^2}+C$

19 $\frac{1}{10}e^{x}(\operatorname{sen}2x-2\cos 2x)+C.$

20 $\frac{1}{2}(\operatorname{Sh}x\cdot\operatorname{sen}x-\operatorname{Ch}x\cdot\cos x)+C.$

21 $\frac{1}{2}(\operatorname{Ch}x\ \ \cos x+\operatorname{Sh}x\cdot\operatorname{sen}x)+C.$

22 $\frac{1}{2}(\operatorname{Sh}x\cdot\cos x+\operatorname{Ch}x\cdot\operatorname{sen}x)+C.$

23 $\frac{1}{32}x^4[8(\ln x)^2-4\ln x+1]+C.$

Respuestas del § 8 (págs. 308-309):

1 $\frac{1}{4}(2+3x)^{\frac{4}{3}}+C.$ 2 $\frac{1}{3}(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}+C.$

3. $\frac{1}{3a}(ax^2+b)^{\frac{3}{2}}+C$

4. $\frac{1}{2}(e^{2x}-e^{-2x})-2x+C$

5. $e^{\operatorname{tg} x}+C$

6. $\frac{a^{nx}}{n\cdot\ln a}+C$

7. $2e^{\sqrt{x}}+C$

8. $\frac{2^x e^x}{1+\ln 2}+C$

9. $(\sqrt{x}-1)^2+4(\sqrt{x}-1)+2\ln(\sqrt{x}-1)+C$

10. $2x+\ln(x-1)^3+C$

11. $\frac{1}{2}x^2-2x+\ln(x+2)^5+C$

12. $\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\ln(2x-1)+C$

13. $x+\frac{1}{2}\cos 2x+C$

14. $\frac{2}{n}\sqrt{\operatorname{sen} n\alpha}+C$

15. $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+C$

16. $2\sqrt{1+\operatorname{sen} x}+C$

17. $-\frac{1}{b(a+b\operatorname{tg} x)}+C$

18. $-\frac{1}{b}\ln(a+b\cos x)+C$

19. $\frac{1}{3}\ln\frac{1}{1-x^3}+C$

20. $\frac{1}{10}\cos^5 2x-\frac{1}{6}\cos^3 2x+C$

21. $\sec x+2\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C.$

22. $2\sqrt{\sec x}+C$

23. $\frac{1}{7}\cos^7 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$

24. $-\frac{1}{4}\ln(1+2\operatorname{cosec} 2\theta)+C$

25. $-\frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x+C$

26. $-\frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x+\operatorname{cotg} x+x+C$

27. $-\left(\frac{1}{5}\operatorname{cotg}^5 x+\frac{2}{3}\operatorname{cotg}^3 x+\operatorname{cotg} x\right)+C$

28. $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}x+C$

29. $\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{2}x+C$

30. $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{2}{3}x+C$

31. $\operatorname{arc\,tg} e^x+C$

32. $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen} x^2+C$

33. $\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg} 2x^2+C$

34. $\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4}(x-1)+C$

35. $\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{3}(t+1)+C$

36. $\frac{1}{2}(\operatorname{arc\,sen} x)^2+C$

37. $\frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2+C$

38. $-\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{2}\cos t\right)+C.$

39. $-\sqrt{8x-x^2}+3\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{4}x-1\right)+C.$

40. $-\frac{2}{9}\sqrt{6x-9x^2+3}-\frac{7}{9}\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{2}(3x-1)+C.$

41. $-\frac{4}{5}\sqrt{9-5x^2}-\frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}x\right)+C.$

42. $\operatorname{arc\,sen} x-\sqrt{1-x^2}+C.$

43. $\sqrt{x^2+x}+\frac{3}{2}\operatorname{Arg\,Ch}(2x+1)+C=$

$=\sqrt{x^2+x}+\frac{3}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right)+C'.$

44. $\frac{2}{5}\sqrt{3+5x^2}+\frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{Arg\,Sh}\sqrt{\frac{5}{3}}x+C=$

$=\frac{2}{5}\sqrt{3+5x^2}+\frac{\sqrt{5}}{5}\ln(\sqrt{5}x+\sqrt{3+5x^2})+C'.$

45. $\frac{1}{3}x^3\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(x^2+1)+C$

46. $x-\sqrt{1-x^2}\operatorname{arc\,sen} x+C.$

47. $\operatorname{Sh}^3 x\operatorname{Ch} x-\frac{3}{32}\operatorname{Sh}4x+\frac{3}{8}x+C.$

48. $\frac{1}{2}(\operatorname{sen} x\operatorname{Ch} x-\cos x\operatorname{Sh} x)+C.$

RESPUESTAS DEL § 9 (págs. 318-321):

1. $\frac{1}{20}\ln\frac{2x-5}{2x+5}+C.$

2 $-\frac{1}{6}\ln\frac{3+\cos t}{3-\cos t}+C.$

3. $\frac{1}{4}\ln\frac{z-4}{z}+C.$

4. $\ln\frac{x}{(2-x)^4}+C.$

5 $\frac{1}{2}x^2+\ln\frac{x^2-1}{x}+C.$

6. $\frac{1}{2}\ln\frac{x(x+2)^5}{(x+1)^4}+C.$

7. $\ln\frac{(x+4)^2}{x+2}+C.$

8. $x-\ln\frac{(x-2)^3}{(x-3)^8}+C.$

9. $x+\ln\frac{x-2}{x-1}+C$

10. $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1-x^2}+C.$

11. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^{10}}{x^9(x+2)}+C.$

12 $\frac{1}{2}\ln\frac{(x-3)^9(x-1)}{(x-2)^8}+C.$

13 $\frac{1}{8}\ln (x+1)^3 (x-7)^{13} + C.$

14. $\frac{1}{6}\ln\frac{x-2}{x+4} + C.$

15. $\frac{1}{4}\ln\frac{t-9}{t-5} + C.$

16 $\ln\frac{2x+1}{x+1} + C.$

17. $x + \ln\frac{x-1}{x+1} + C.$

18. $\frac{1}{6}\ln\frac{x^2-9}{x^2} + C.$

19. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-2)^3 (x+1)^4}{(x+2)^3} + C$

20 $-\frac{2}{x+1} + \ln\frac{x+1}{x} + C.$

21. $-\frac{2}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{(x+4)^5}{x^3} + C.$

22. $\frac{1+2x}{(1+x)^2} + \ln (x+1) + C.$

23 $2\ln\frac{x}{x+1} + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + C.$

24 $\frac{1}{4}\ln (e^{2x}+2) + \frac{1}{2}x + C.$

25 $\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + C$

26 $\frac{1}{6}\ln\frac{x^2-2}{x^2+1} + C.$

27 $-\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\ln\frac{x+1}{x-1} + C.$

28 $\frac{a(b-c)\ln(x-a) + b(c-a)\ln(x-b) + c(a-b)\ln(x-c)}{(b-a)(c-b)(a-c)} + C.$

29 $\frac{a}{b-a}\frac{1}{x-a} + \frac{b}{(b-a)^2}\ln\frac{x-b}{x-a} + C.$

30 $-\frac{1}{(a-b)^2}\left[\frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b}\right] - \frac{a+b}{(a-b)^3}\ln\frac{x-a}{x-b} + C.$

31 $\frac{a-2x}{2(x-a)^2} + C$

32 $\frac{1}{2}\frac{1}{a^2-b^2}\ln\frac{x^2+b^2}{x^2+a^2} + C.$

33 $\frac{1}{8}\ln\frac{x^2-4}{x^2+4} + C.$

34 $-\frac{1}{x+2} + \frac{1}{4}\ln\frac{(x+2)^2}{x^2+4} + C.$

35 $\frac{1}{2}\ln\frac{(x^2+2)^2}{x^2+1} + C.$

36 $\frac{1}{4}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + C.$

37 $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} + C.$

38 $-\frac{2}{x+2} + \ln\frac{x+2}{x+1} + C.$

39. $\frac{4}{x+2} + \ln (x+1) + C.$

40 $\frac{1}{4}\ln\frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{x}{x^2-1} + C.$

41 $2\ln\frac{x}{1-x} + \frac{2x-1}{x(1-x)} + C.$

42 $-\frac{1}{4}\ln\frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{x}{x^2-1} + C.$

43 $-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} + \ln\frac{x}{x+1} + C$

45. $-\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} + \operatorname{arc\,tg} x + C.$

46 $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C$

47 $\frac{1}{4}\ln[(1+x^2)(1+x)^2]-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x+C$

48 $\frac{1}{4}\ln\frac{(1+x)^2}{1+x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x+C$ 49 $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+4}{x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}x+C$

50 $\frac{3}{4}\ln(2x^2-3x+5)+\frac{37}{2\sqrt{31}}\operatorname{arc\,tg}\frac{4x-3}{\sqrt{31}}+C.$

51 $\ln(x^2+2x+3)-\frac{3}{2}\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$

52 $-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-3\operatorname{arc\,tg} x+C$

53 $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^4}{x^2+1}+\operatorname{arc\,tg} x+C$ 54 $-\frac{1}{x}+\frac{2}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C$

55 $-\frac{1}{2}\frac{x-1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x+C$

56 $-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}x+C$ 57 $\frac{1}{x}+\ln x+\operatorname{arc\,tg} 2x+C$

58 $-\frac{2+3x^2}{2x(1+x^2)}-\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg} x+C$

59 $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{1+\sqrt{2}x+x^2}{1-\sqrt{2}x+x^2}+\frac{1}{4}\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}+C$

60 $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$

61 $\frac{1}{a^2-b^2}\left[a\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}-b\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{b}\right]+C$

62 $\frac{1}{2(a^2-b^2)}\left[(a^2\ln(x^2+a^2)-b^2\ln(x^2+b^2)\right]+C$

63 $\frac{1}{4}\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x\left[\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x\right]+C$

RESPUESTAS DEL § 10 (págs. 326-327)

1 $\frac{7}{4}\sqrt[7]{x^4}+\frac{7}{2}\sqrt[7]{x^2}+\frac{7}{2}\ln\frac{\sqrt[7]{x}+1}{\sqrt[7]{x}-1}+C$

2 $\ln\frac{1+(x+3)^{\frac{1}{2}}}{1-(x+3)^{\frac{1}{2}}}+C$

3 $12(x+1)\left[\frac{\sqrt[4]{x+1}}{15}+\frac{\sqrt[12]{x+1}}{13}\right]+C$

4 $\frac{3}{2}z^2-\frac{1}{2}\ln\frac{z^2-z+1}{(z+1)^2}-\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}}+C$

5 $\frac{2}{9}(1+z^3)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1+z^3)^{\frac{1}{2}} + C$

6 $-\left[2y^{\frac{1}{2}} + 3y^{\frac{1}{3}} + 6y^{\frac{1}{6}} + 6\ln\left|y^{\frac{1}{6}} - 1\right|\right] + C$

7 $x + 2 + 8\sqrt{x+2} + 16\ln(\sqrt{x+2} - 2) + C.$

8 $\ln(x + \sqrt{x} + 1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\frac{1+2\sqrt{x}}{\sqrt{3}} + C$

9 $\sqrt{2}\,\text{Arg Th}\sqrt{\frac{1}{2}(1+x)} + C.$ 10 $2\sqrt{x} - 2\,\text{Arg Th}\,\sqrt{x} + C$

11 $\frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + C$ 12 $2\sqrt{x} + 2\ln(\sqrt{x} - 1) + C$

13 $\frac{2}{3(a-b)}\left[(x+a)^{\frac{3}{2}} - (x+b)^{\frac{3}{2}}\right] + C$

14 $\frac{1}{15}(3x - 4\sqrt{x} + 8)\sqrt{1+\sqrt{x}} + C$

15 $\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+1} - \text{Arg Sh}\,\sqrt{x^2+1}) + C$

16 $\ln(x + \sqrt{x-1}) - \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\frac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{3}} + C$

17 $\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} - x + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} - 2x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{1}{4}} - 4\ln\left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right) + C.$

18 $2\,\text{arc tg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{1-x^2} + C.$

19 $6x^{\frac{1}{6}} + 3\ln(1 + \sqrt[3]{x}) - 6\,\text{arc tg}\,x^{\frac{1}{6}} + C.$

20 $x^{-\frac{1}{4}}\left[1 - \frac{1}{1+x^{\frac{3}{4}}}\right] + C$ 21 $\frac{1}{40}(1+2x^3)^{\frac{2}{3}}(4x^3 - 3) + C$

22 $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\text{arc tg}\,\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}} + C$ 23 $\frac{1}{4}\sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{2}x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2}x - \sqrt{1+x^2}} + C$

24 $\frac{1}{15}\sqrt{1+2x}\,(3x^2 - 2x + 2) + C.$

25 $\sqrt{x(a-x)} + \frac{1}{2}a\,\text{arc sen}\left(2\frac{x}{a} - 1\right) + C.$

26 $-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+16}} + \ln\dfrac{1}{4}(x + \sqrt{x^2+16}) + C$

27 $-2 \operatorname{Arg\,Th} \sqrt{1+x} + C.$

28 $-\dfrac{\sqrt{1+x}}{x} + \operatorname{Arg\,Th} \sqrt{1+x} + C.$

29 $2\sqrt{t+1} - 4 \operatorname{Arg\,Th} \sqrt{t+1} + C$

30 $4 \ln \dfrac{\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt[4]{x}} + C$

31 $\dfrac{1}{16}\left[\dfrac{2}{x^2}\sqrt{x^2-4} - \operatorname{arc\,sen}\dfrac{2}{x}\right] + C$

32. $-\dfrac{1}{x}\sqrt{1-x^2} + C$

33 $\dfrac{1}{3x^3}\sqrt{1+25x^2}\,(50x^2-1) + C.$

34 $-\operatorname{arc\,sen}\dfrac{1-x}{\sqrt{2}x} + C$

RESPUESTAS DEL § 12 (pág 335)

1 $\operatorname{sen}^6 \dfrac{x}{6} + C$

2 $\dfrac{1}{2}\cos^2 x - \ln(\cos x) + C$

3 $\dfrac{1}{12}\cos^4 x\,(2\cos^3 x - 3) + C$

4 $-\dfrac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 x - \ln(\operatorname{sen} x) + C$

5 $\dfrac{1}{8}\left[y - \dfrac{1}{4}\operatorname{sen} 4y\right] + C$

6 $\dfrac{\operatorname{sen} x}{15\cos^5 x}(3 + 4\cos^2 x + 8\cos^4 x) + C$

7 $\dfrac{1}{4}\dfrac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^6 x} - \dfrac{1}{12}\operatorname{tg}^6 x + C.$

8. $-\dfrac{\operatorname{sen} x \cos x}{1\,920}(240\operatorname{sen}^6 x + 336\operatorname{sen}^4 x + 350\operatorname{sen}^2 x + 525) + \dfrac{35}{128}x + C$

9. $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^4\dfrac{x}{2} - 2\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2} - 4\ln\cos\dfrac{x}{2} + C.$

10 $-\dfrac{1}{2}\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} - \dfrac{1}{2}\ln\ \operatorname{tg}\dfrac{1}{2}x\ + C$

11 $2\ln(\operatorname{tg} x) + 2\operatorname{cosec}^2 2x - \operatorname{cosec}^2 x + C$

12 $\ln\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{1 + \operatorname{tg}\frac{1}{2}x} + C.$

13 $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\left[\ln\left(\operatorname{sen} x - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \ln\left(\operatorname{sen} x - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right] + C$

14 $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\ln\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x - 1 + \sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x - 1 - \sqrt{2}} + C$

15 $\dfrac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\ \ \sqrt{5}\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}x\ \ + C$

16. $-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}\left(5\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)+C.$

17. $\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2+3\cos x}+C$

18. $-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arg\,Th}\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x+2}{\sqrt{3}}+C.$

19. $-\frac{x}{3}-\frac{4}{3\sqrt{5}}\operatorname{Arg\,Th}\frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}x-3}{\sqrt{5}}+C.$

20. $\frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{5}{6}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)+C.$

21. $\frac{x}{5}+\frac{4}{15}\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x-3}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x+3}+C.$

Respuestas del § 13 (págs. 336-337)

1. $-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{4}\cos 2x+C.$

2 $\frac{1}{2}x\cos 4+\frac{1}{8}\operatorname{sen}(4x+2)+C.$

3. $-\frac{1}{2}x\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}\cos 2x+C.$

4. $\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(5x-4)}{5}-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(4-x)+C.$

5. $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{9}\cos 9x+\cos x-\frac{1}{7}\cos 7x-\frac{1}{3}\cos 3x\right]+C.$

6. $\frac{1}{4}\left[x+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x-\frac{1}{4}\operatorname{sen}4x-\frac{1}{6}\operatorname{sen}6x+\frac{1}{20}\operatorname{sen}10x\right]+C.$

7. $\frac{1}{4}\left(\frac{\operatorname{sen}11x}{11}+2\frac{\operatorname{sen}5x}{5}+\operatorname{sen}x\right)+C.$

8. $\frac{\operatorname{Sh}5x}{10}-\frac{1}{2}\operatorname{Sh}x+C.$

9. $\frac{1}{6}\operatorname{Ch}3x+\frac{1}{2}\operatorname{Ch}x+C.$

10. $\frac{1}{14}\operatorname{Sh}7x+\frac{1}{6}\operatorname{Sh}3x+C.$

CAPÍTULO XI

INTEGRALES DEFINIDAS

1. EL PROBLEMA DEL AREA

En geometría se estudian las fórmulas que permiten calcular las áreas de los polígonos.

Recordemos los pasos que se siguen en ese estudio. Primero se determina el área de un rectángulo por comparación con un cuadrado que se toma como *unidad* y luego se demuestra que un paralelogramo es equivalente a un rectángulo de igual base y altura y que un triángulo es equivalente a un paralelogramo de igual base y altura mitad

En general se puede calcular el área de cualquier polígono descomponiéndolo en un numero finito de triángulos

Cuando hay que calcular el área del circulo se debe recurrir al concepto de *límite*. Se inscriben y circunscriben en la circunferencia

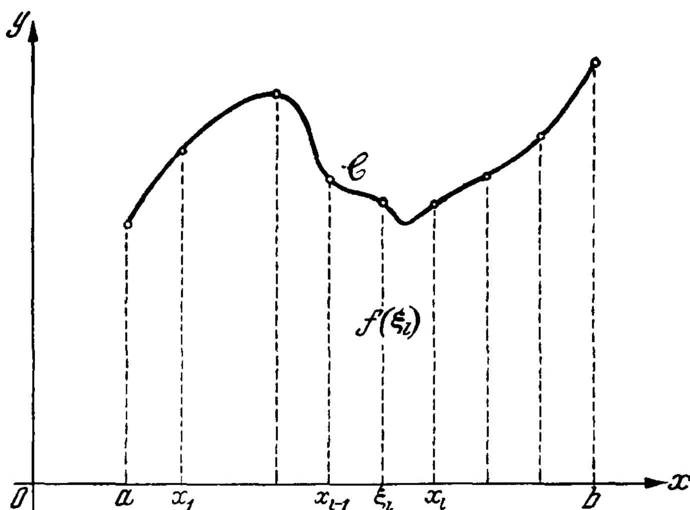


FIG XI-1

polígonos regulares de n lados y se define el área del círculo como el límite común de las áreas de los polígonos inscriptos y circunscriptos cuando el número n tiende a infinito

AREA DE CONTORNOS CURVOS Se trata ahora de definir el área de una figura con un contorno curvo cualquiera. Empezaremos por con-

siderar el recinto R limitado por la curva C que representa una función continua $y = f(x)$ definida en un intervalo (a, b), el eje de las abscisas y las ordenadas extremas trazadas en los puntos $x = a$, $x = b$.

Dividimos el intervalo (a, b) en n partes (iguales o desiguales) mediante los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ y consideramos además $x_0 = a$; $x_n = b$.

En cada uno de los intervalos parciales se eligen sendos puntos ξ cualesquiera:

$$x_0 \leqslant \xi_1 \leqslant x_1, \quad x_1 \leqslant \xi_2 \leqslant x_2, \quad x_2 \leqslant \xi_3 \leqslant x_3; \quad \ldots; \quad x_{n-1} \leqslant \xi_n \leqslant x_n$$

y en los puntos ξ_i se calcula el valor $f(\xi_i)$. El producto $(x_i - x_{i-1})f(\xi_i)$ mide el área del rectángulo de base $(x_i - x_{i-1})$ y altura $f(\xi_i)$. Formando la suma de las áreas de todos los rectángulos análogos se tendrá un *valor aproximado* del área buscada

$$A_{\text{aprox}} = (x_1 - x_0)f(\xi_1) + (x_2 - x_1)f(\xi_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1})f(\xi_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\xi_i).$$

Si existe el límite de esta suma cuando el número n de intervalos tiende a infinito y cada uno de los intervalos tiende a cero, ese número es *por definición* el área A del recinto:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})f(\xi_i) = \int_a^b f(x)dx$$

donde la última notación se lee "integral definida entre a y b de *efe* de x diferencial x".

El símbolo $\int$ no es otra cosa que una modificación de la letra S, inicial de suma y el diferencial x corresponde a $(x_i - x_{i-1}) = \Delta x_i$.

Aplicaremos esta definición a algunas funciones muy sencillas:

EJEMPLOS

1º) Si se trata de la función $f(x) = k$, cuya gráfica es una recta paralela al eje de las x, resulta

$$A_{\text{aprox}} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})f(\xi_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})k,$$

como k es un factor común se puede sacar fuera de la suma y resulta

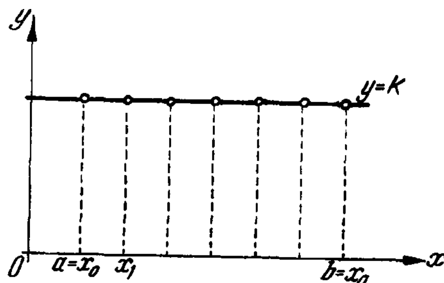


FIG XI-2

$$A_{\text{aprox}} = k \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = k(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \quad + x_n - x_{n-1}) =$$

$$= k(x_n - x_0) = k(b - a).$$

Como esta expresión es independiente de n su límite para $n \to \infty$ será el mismo valor

$$A = \int_a^b k\,dx = k(b - a)$$

2º) Sea $y = x$ definida en el intervalo $(0, 1)$. Dividamos este intervalo en n partes iguales mediante los puntos

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{n},\ x_2 = \frac{2}{n}, \quad ,\ x_n = \frac{n}{n} = 1.$$

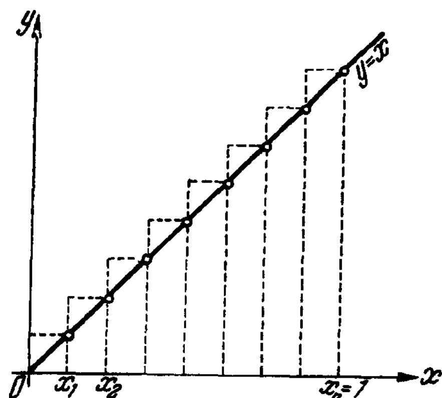


FIG XI-3

Adoptemos como valor ξ_i el punto x_i con lo que resulta $f(\xi_i) = \xi_i = \frac{i}{n}$ y por ser $(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{n}$, se tiene

$$A_{\text{aprox}} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{i}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i =$$

$$= \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \quad + n)$$

La expresión entre paréntesis es una progresión aritmética de razón 1 Reemplazándola por su suma resulta

$$A_{\text{aprox}} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{2}(1 + n)n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

y el límite de esta expresión es

$$A = \int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Confírmase así el resultado elemental de que el área del triángulo rectángulo isósceles de catetos unidad es igual a $\frac{1}{2}$.

3º) Sea $y = x^2$ en el mismo intervalo y con los mismos puntos de división del ejemplo anterior Resulta

$$A_{\text{aprox}} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i^2 =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{1}{n}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots \left(\frac{n}{n}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2).$$

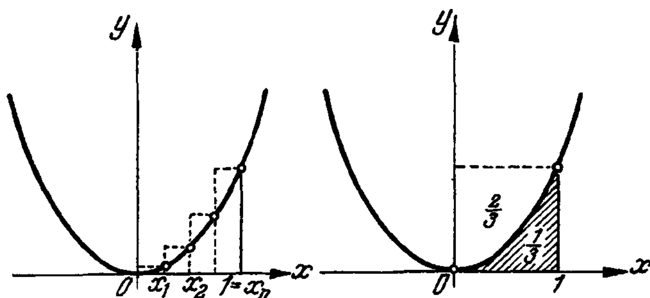


FIG XI-4

La expresión entre paréntesis es la suma S_2 de los cuadrados de los n primeros números naturales, se puede expresar en forma cerrada como se ha visto en la página 14 mediante la fórmula $S_2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ Resulta entonces

$$A_{\text{aprox}} = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

Pasando al límite, cuando $n \to \infty$ es

$$A = \int_0^1 x^2\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

OBSERVACIONES.

1 De haber tenido que determinar las áreas por este procedimiento, las posibilidades del cálculo integral hubieran sido muy escasas pues aún para funciones simples, el cálculo de las sumas que aparecen en la definición son muy difíciles o imposibles Veremos más adelante cómo el concepto de integral se vincula con el de derivada, permitiendo obtener las áreas en forma sencilla.

2 Hemos definido el área del recinto R como el límite de una suma ¿Existirá siempre ese límite? Para el caso de las *funciones continuas* en un intervalo cerrado, que son las que hemos considerado en este párrafo, la contestación es *afirmativa*, como se puede ver en el fascículo de "Complementos teóricos" que integra esta edición

2. DEFINICION GENERAL DE INTEGRAL DEFINIDA

Acabamos de definir el área de un recinto R limitado por una curva C, diagrama de una *función continua* $y = f(x)$, como límite de una suma.

Consideremos ahora una función $y = f(x)$ acotada, continua o no, definida en un intervalo (a, b). Dividimos este intervalo en n partes, iguales o desiguales, mediante los puntos $x_0 = a$, x_1, x_2, .. , x_{n-1}, $x_n = b$ y en cada uno de ellos consideramos un valor ξ_i con $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$. Formamos los productos $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ y hacemos la suma correspondiente a los n intervalos. Calculamos ahora el límite de esta suma cuando el número de intervalos tiende a ∞ (y cada uno de los intervalos tiende a cero). Si este límite existe y es finito, es por definición la *integral definida* de $f(x)$ en el intervalo (a, b).

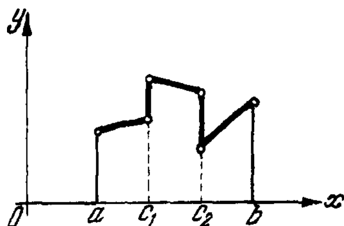


FIG XI-5

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

En particular si $f(x)$ es continua esta definición coincide con la definición de área dada anteriormente. Si $f(x)$ tiene como en la figura un número finito de discontinuidades finitas en c_1, c_2, . . , c_n puede considerarse como el área del contorno limitado por la línea gruesa de la figura [1].

Conviene señalar que la integral definida es un *algoritmo matemático* que puede aplicarse a distintas cuestiones concretas recibiendo entonces interpretaciones diversas áreas, volúmenes, momentos, trabajos etc., tal como veremos en los capítulos XII y XIII

PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS Para completar la definición de integral definida agregaremos las dos siguientes, perfectamente acordes con la definición general

1°) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2°) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Si consideramos en el intervalo (a, c) un punto interior b tal que

$$ab + bc = ac$$

resulta de acuerdo a la definición general

3°) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

[1] Más adelante extenderemos la noción de integral al caso de discontinuidades infinitas y de intervalos de integracion infinitos

y por 2°) la relación vale aún cuando b sea exterior al intervalo (a, c)

Si la función $f(x)$ es negativa en un intervalo como el (b, c) de la figura, correspondientemente la integral resulta negativa de acuerdo a la definición. Si se trata de una función continua se puede considerar que el área limitada por la curva y el eje de las abscisas es negativa.

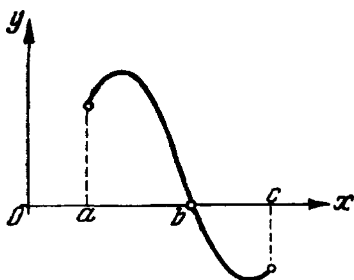


Fig. XI-6

3. TEOREMA DE LA MEDIA

Hemos supuesto que la función $f(x)$ es acotada, es decir que se verifica

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Por consiguiente será

$$m\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\xi_i) \leqslant M \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})$$

o sea

$$m(b-a) \leqslant \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\xi_i) \leqslant M(b-a)$$

y haciendo tender n a ∞, si el límite de la sumatoria existe y es finito, resulta

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

Es decir, que existe un valor μ comprendido entre m y M tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\mu$$

Resulta, entonces, el teorema de la media

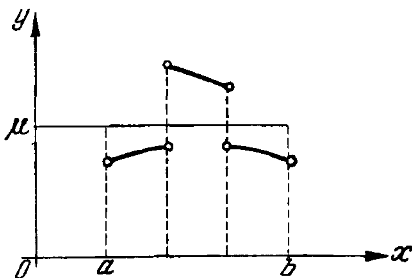


Fig XI-7

La integral definida de una función acotada cuyos valores están comprendidos entre m y M es igual a la amplitud del intervalo de integración multiplicado por un valor μ comprendido entre m y M

Si la función $f(x)$ es continua, entonces por lo menos en un punto ξ del intervalo $[a, b]$, la función *tomará el valor* μ y en este

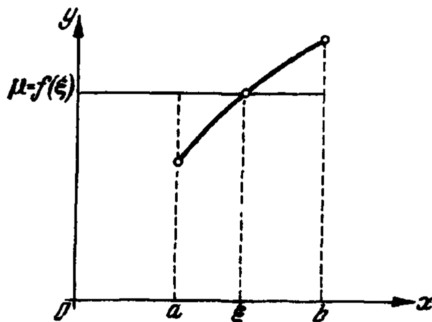


FIG XI-8 — El valor medio μ es la altura de un rectángulo de base $(b - a)$ y área igual a la del recinto R

caso se podrá escribir

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi).$$

La integral definida de una función *continua* es igual al intervalo de integración multiplicado por el valor que toma la función en un cierto punto intermedio.

Se llama *valor medio* de una función $f(x)$ en un intervalo (a, b) al valor μ definido por la relación

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

4. INTEGRACION GRAFICA

La integración gráfica constituye una manera rápida de calcular aproximadamente el área de un recinto R limitado por una curva C, imagen de una función $y = f(x)$.

Antes de estudiar el caso general consideraremos un caso particular. el de la función $f(x) = k$, siendo k un valor constante, lo cual significa que la curva C será un segmento de recta AB paralela al eje de las abscisas en un intervalo (a, b).

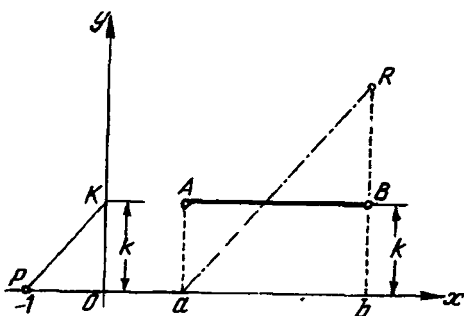


FIG. XI-9

Designemos con P (polo) al punto de coordenadas $(-1{,}0)$ y sea K la proyección de AB sobre el eje de las y. Queda así determinado el segmento PK, al cual se le traza por a una paralela aR, hasta la intersección con la recta $x = b$.

Demostraremos que el segmento Rb tiene como medida el área del rectángulo $aABb$, considerando que todos los segmentos se han medido tomando como unidad el segmento $PO = 1$.

De la construcción gráfica surge que los triángulos rectángulos PKO y aRb son semejantes y por consiguiente sus lados homólogos son proporcionales

$$\frac{\overline{PO}}{\overline{KO}} = \frac{\overline{ab}}{\overline{Rb}} \quad \text{y dado que } \overline{PO} = 1, \text{ resulta}$$

$$\overline{Rb} = \overline{KO}\ \overline{ab} = k(b-a) = \text{área del rectángulo } aABb.$$

En otros términos, el segmento *Rb* tiene la misma medida que la integral definida

$$\int_a^b k\,dx.$$

En el caso de una función "casi-constante" o "escalera" que se caracteriza por tomar en intervalos sucesivos (a, b), (b, c), (c, d), . . , valores constantes k_1, k_2, k_3, . . . no habrá más que aplicar reiteradamente el procedimiento

En la figura se han trazado 4 "peldaños", el tercero de los cuales tiene ordenada negativa

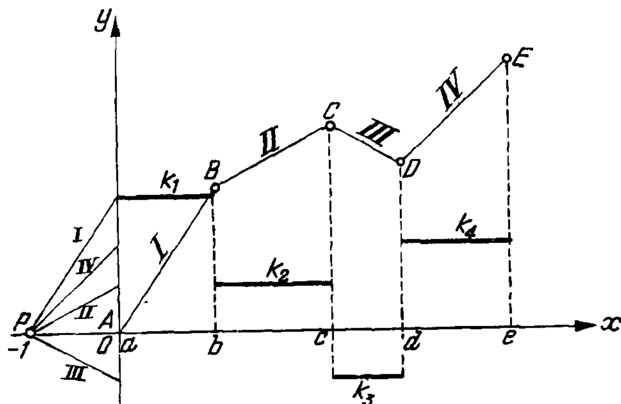


FIG XI-10

La línea *ABCDE* que representa el área de la función "escalera" permite determinar cualquier área correspondiente a abscisas comprendidas entre *a* y *e* Así el segmento *cC* da el área correspondiente a los 2 primeros "peldaños" y cualquiera sea x del intervalo (a, e) la ordenada correspondiente determina el área limitada por la función "escalera" y las abscisas a y x Más general aún, el área determinada por la función, comprendida entre dos abscisas x_1 y x_2, está dada por la diferencia de las ordenadas correspondientes de la curva *ABCDE*

(Todos estos valores corresponden a una unidad igual a *OP* De tomar módulos distintos en los ejes de las abscisas y ordenadas m_x, m_y y en la distancia polar m_p, habrá que considerar como módulo de la curva *ABCDE* el valor $m_x\, m_y \cdot m_p$, tal como se muestra en *Cálculo numérico y gráfico*, M SADOSKY, pág 264)

Finalmente si se trata de una función continua definida en un intervalo (a, g), se determina una función "escalera" de modo tal que el área encerrada por ambas funciones sea aproximadamente equivalente Para ello se utilizan las ordenadas correspondientes a los máximos, mínimos, extremos, etc

Se construye entonces la poligonal cuyas ordenadas dan *aproximadamente* el área.

Los puntos b, d, f se eligen de modo que se compensen las áreas comprendidas entre la función dada y la función "escalera".

En los puntos de abscisas a, c, e, g (que hemos señalado con un circulito), coinciden los valores de las áreas de la función continua y la función "escalera" y por consiguiente la curva buscada debe pasar exactamente por esos puntos. Trazando entonces una curva que resulte tangente, en los puntos señalados con un circulito, a la poligonal determinada para la función "escalera", se tendrá una curva continua cuyas ordenadas medirán con bastante aproximación las áreas encerradas por la curva y el eje de las abscisas.

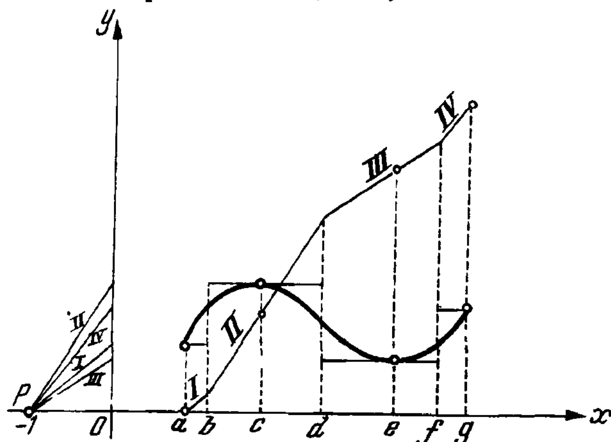


FIG XI-11

EJERCICIO

Dibuje la curva correspondiente a la función $y = \text{sen}\, x + 2$ en el intervalo $(0\ 2\pi)$ Calcule gráficamente el área determinada por esta curva y el eje de las x Compare el resultado con el valor exacto 4π.

INTEGRAL DEFINIDA CON EXTREMO SUPERIOR VARIABLE. RELACIONES ENTRE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN Y LA DE SU INTEGRAL· Dada una función $f(x)$ podemos calcular en un intervalo (a, b), el valor de la integral definida correspondiente.

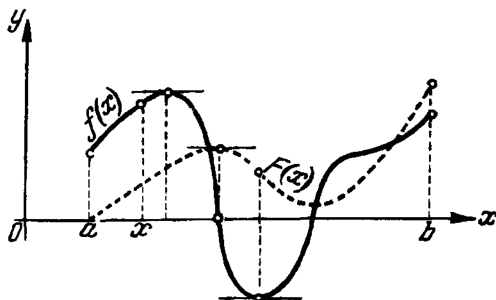


FIG XI-12.

Si consideramos el extremo a fijo y el extremo superior variable, los valores correspondientes

$$\int_a^x f(x)\, dx$$

definirán una función $F(x)$. ¿Podrá establecerse una relación entre la función $f(x)$ y $F(x)$? La *respuesta afirmativa* es la que proporcionan los teoremas fundamentales del cálculo integral

5. TEOREMAS FUNDAMENTALES

I La derivada de la función $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ siendo $f(x)$ una función continua, es $f(x)$.

En lugar de determinar la derivada de $F(x)$ mediante la pendiente de la curva correspondiente. la aplicación directa de la definición de derivada, resolverá la cuestión

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(x)\,dx}{h}.$$

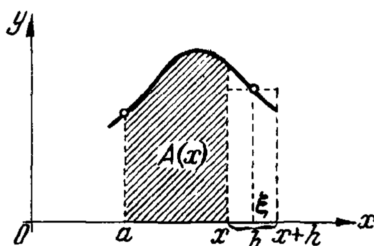


Fig XI-13

De acuerdo al teorema de la media resulta

$$\int_x^{x+h} f(x)\,dx = (x+h-x)f(\xi)$$

con $x \leqslant \xi \leqslant x+h$ Por consiguiente es

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h\,f(\xi)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi) = f(x)$$

II. La función $F(x)$ difiere de una primitiva [1] cualquiera $P(x)$ de $f(x)$ en una constante

$$\left.\begin{array}{l} \text{De acuerdo al teorema anterior} \\ \quad \text{es: } F'(x) = f(x) \\ \text{De acuerdo a la definición de} \\ \quad \text{primitiva es } P'(x) = f(x) \end{array}\right\} \therefore\ F'(x) = P'(x)$$

Dos funciones que tienen igual derivada (pág 273) difieren en una *constante*:

$$F(x) = P(x) + C \qquad [1]$$

---

[1] Recordemos que hemos definido (pág 273) como *función primitiva* de $f(x)$ a una función $P(x)$ que verifica la relación $P'(x) = f(x)$

Conocida una primitiva *cualquiera* de $f(x)$, se conoce la integral $\int_a^x f(x)\,dx$ a menos de una constante.

III Determinación de la constante *Regla de Barrow*. Haciendo $x = a$ en [1] resulta

$$F(a) = P(a) + C$$

y como $F(a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$ se obtiene

$$C = -P(a),$$

llegando finalmente a la fórmula fundamental

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx = P(x) - P(a)$$

Determinada una primitiva *cualquiera* de $f(x)$, la integral de $f(x)$ entre a y x es igual a la diferencia de valores que toma esa primitiva entre x y a

En particular si el extremo superior es b resulta la regla de Barrow

$$\int_a^b f(x)\,dx = P(b) - P(a) = \Big[P(x)\Big]_a^b \qquad [2]$$

indicando simbólicamente con la última expresión la diferencia $P(b) - P(a)$.

6. CALCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS

Con la fórmula [2] queda totalmente resuelto el cálculo de las integrales definidas y como caso particular, el cálculo de áreas.

EJEMPLOS

1°) Sea calcular

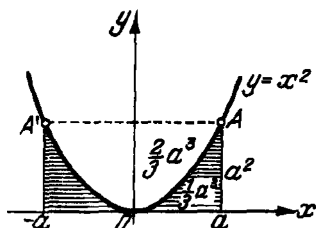


FIG. XI-14

$$\int_{-a}^{a} x^2\,dx$$

Como una primitiva de x^2 es $\frac{1}{3}x^3$ resulta

$$\int_{-a}^{a} x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-a}^{a} = \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{3}(-a)^3 = \frac{2}{3}a^3$$

Interpretada geométricamente, esta integral definida representa el área rayada en la figura Como el rectángulo de vértices $-a$, A', A, a tiene como área $2a \cdot a^2 = 2a^3$, resulta que el área del sector parabólico $A'OA$ es igual a $2a^3 - \frac{2}{3}a^3 = \frac{4}{3}a^3$. resultado ya conocido por ARQUÍMEDES quien expresó que "todo segmento de parábola equivale a los $\frac{4}{3}$ del triángulo de igual base y

altura". En nuestro caso el triángulo $A'OA$ tiene base $2a$ y altura a^2 y por ello área a^3.

2º) Calcular $A = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx.$

Puesto que una primitiva de $\operatorname{sen} x$ es $-\cos x$ resulta

$$A = \Big[-\cos x \Big]_0^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos 0) = -1 + 1 = 0.$$

Interpretado como área este resultado nos dice que el recinto limitado por la sinusoide y el eje de las abscisas en el intervalo $(0, 2\pi)$ tiene área nula. Esto ocurre porque el área es igual a 2 en el intervalo $(0, \pi)$ e igual a -2 en $(\pi, 2\pi)$. (Verifique el lector estos resultados). Si se trata de conocer el área con prescindencia del signo resulta que el área limitada por la sinusoide en una oscilación completa es 4.

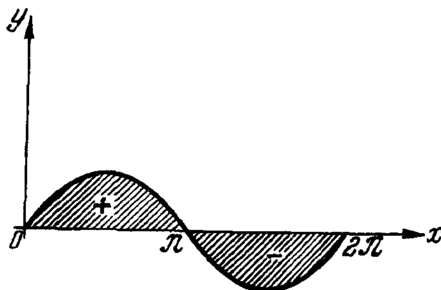


FIG. XI-15.

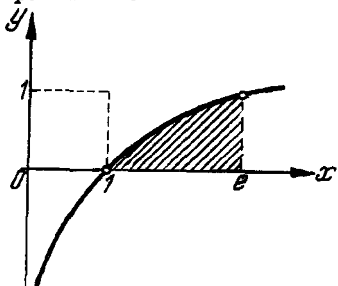


FIG XI-16.

3º) Calcular $\int_1^e \ln x \, dx.$

Puesto que una primitiva de $\ln x$ es $x(\ln x - 1)$, como ya hemos visto al estudiar integración por partes, resulta

$$\int_1^e \ln x \, dx = \Big[x(\ln x - 1) \Big]_1^e =$$

$$= e(\ln e - 1) - 1(\ln 1 - 1) = 1$$

Geométricamente este resultado significa que el área limitada por la curva logarítmica, el eje de las x y la ordenada correspondiente a $x = e$ es igual al área de un cuadrado de lado 1.

4º) Sea calcular $A = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx$

Hemos visto (pág. 300) que la integral indefinida correspondiente se podía calcular haciendo la sustitución $x = r \operatorname{sen} t$ con lo que se llegaba a una primitiva·

$$P(t) = \frac{1}{2} r^2 (t + \operatorname{sen} t \cdot \cos t) \qquad [1]$$

o pasando a la variable x

$$P(x) = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{r} + x \sqrt{r^2 - x^2}.$$

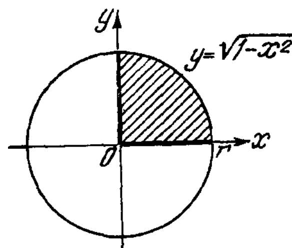


FIG XI-17

Acotando esta expresión entre 0 y r se tiene

$$A = \frac{1}{2}[r^2 \operatorname{arc\,sen} 1 + r \cdot 0 - r^2 \cdot 0 - 0 \cdot r] = \frac{1}{2}r^2 \cdot \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{4}\pi r^2$$

Resulta más cómodo evitar el paso de la variable t a la variable x puesto que si es $x = r \operatorname{sen} t$, para $x = 0$ debe ser $t = 0$ y para $x = r$ debe ser $t = \frac{1}{2}\pi$.

Reemplazando en [1] se tiene

$$A = \frac{1}{2}r^2 \left[t + \operatorname{sen} t \cos t \right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{2}r^2 \left[\frac{1}{2}\pi + \operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi \cos\frac{1}{2}\pi - 0 - \operatorname{sen} 0 \cdot \cos 0 \right] =$$
$$= \frac{1}{4}\pi r^2$$

Esta integral definida representa geométricamente la cuarta parte del círculo de centro en el origen y radio r

5°) Calcula el área limitada por las parábolas de eje horizontal

$$y^2 = 8(x + 2), \qquad y^2 = 32(8 - x) \qquad [1]$$

Por razones de simetría es suficiente calcular el área correspondiente al semiplano superior $y > 0$ y multiplicar el resultado por 2

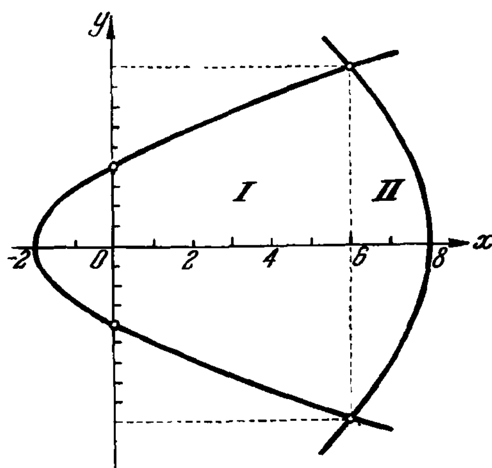


FIG XI-18

Igualando los segundos miembros de las expresiones [1] se ve que las parábolas se encuentran en $x = 6$ Habrá que calcular entonces el área A' limitada por la primera de las parábolas para x variando entre -2 y 6 y el área A'' limitada por la segunda de las parábolas para x comprendido entre 6 y 8

$$A' + A'' = \int_{-2}^{6} \sqrt{8(x + 2)}\, dx + \int_{6}^{8} \sqrt{32(8 - x)}\, dx$$

Puesto que las integrales indefinidas son

$$\int \sqrt{8(x + 2)}\, dx = \sqrt{8}\, \frac{2}{3}(x + 2)^{\frac{3}{2}} + C, \int \sqrt{32(8 - x)}\, dx = -\sqrt{32}\, \frac{2}{3}(8 - x)^{\frac{3}{2}} + C'$$

resulta

$$A' + A'' = \frac{2\sqrt{8}}{3} \left[(x + 2)^{\frac{3}{2}} \right]_{-2}^{6} - \frac{8\sqrt{2}}{3} \left[(8 - x)^{\frac{3}{2}} \right]_{6}^{8} = \frac{160}{3}$$

y el área es el doble $\frac{320}{3}$.

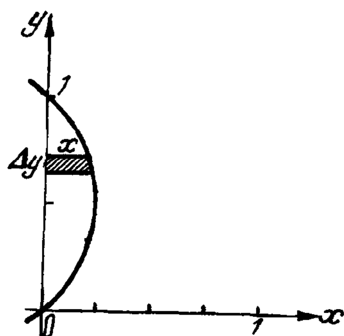


Fig XI-19.

6º) Determinar el área limitada por la parábola

$$x = -y^2 + y$$

y el eje de las ordenadas

En este caso es x función de y y puesto que la parábola corta al eje de las ordenadas en los puntos 0 y 1, resultará

$$A = \int_0^1 x\,dy = \int_0^1 (-y^2 + y)\,dy =$$

$$= \left[-\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

7º) Determinar el área encerrada por la parábola

$$y = 1 + 2x - x^2$$

y la cuerda que une los puntos $(-1, -2)$, $(2, 1)$.

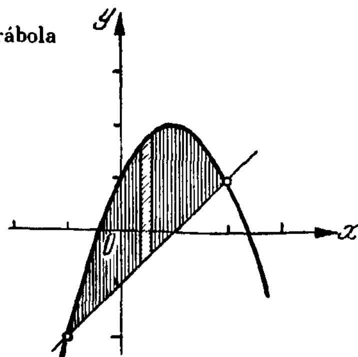


Fig XI-20

Según los datos del problema la ecuación de la cuerda es $y = x - 1$. En lugar de calcular el área como diferencia de las integrales definidas

$$\int_{-1}^{2} (1 + 2x - x^2)\,dx - \int_{-1}^{2} (x - 1)\,dx,$$

es mejor restar las ordenadas de las 2 curvas (en este caso la parábola y la recta) e integrar·

$$A = \int_{-1}^{2} (2 + x - x^2)\,dx = \left[2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} = 4\frac{1}{2}$$

8º) Calcular el área comprendida entre las parábolas

$$y^2 = 2x, \qquad x^2 = 2y$$

Las parábolas se cortan en $x = 0$, $x = 2$ y el área será, considerando como en el ejemplo anterior las diferencias de ordenadas

$$A = \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{1}{2}x^2\right) dx =$$

$$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{2}\,x\,\sqrt{x} - \frac{1}{6}x^3\right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

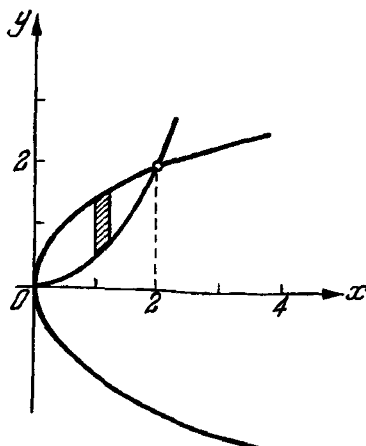


Fig XI-21.

Ejercicios

1 Determinar el área limitada por la recta

$$y = x + 1,$$

el eje de las x y las ordenadas $x = 1$, $x = 3$.

R: 6.

2 Determinar el área del triángulo limitado por la recta $y = x + 2$, el eje de las x y la vertical $x = 3$

R 12,5.

3 Determinar el area del trapecio limitado por la recta $y = x + 2$, y las ordenadas de abscisa $x = 0$, $x = 4$

R 16.

4 Determinar el área encerrada por la curva

$$y = 2 - x^2$$

y la recta

$$y = 1$$

R: $\frac{4}{3}$.

5 Verificar que la curva

$$4y = x^2 (x + 2)$$

limita con el eje x, el área $\frac{1}{3}$.

6 Verificar que la parábola

$$2y = (x - 1)(x - 3)$$

limita con el eje x, el área $\frac{2}{3}$.

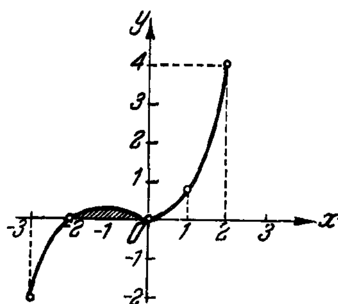


FIG XI-22

7. Determinar el segmento parabólico de la curva

$$y = x^2 - 7x + 9$$

intersectada por la recta

$$y = 3 - 2x$$

R $\frac{1}{6}$.

8 Calcular el área encerrada por la parábola

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$$

y los ejes coordenados

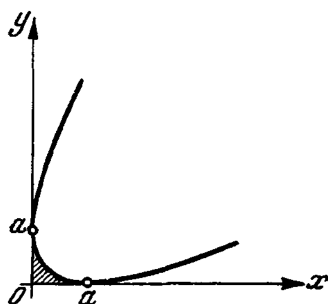


FIG. XI-23.

(Téngase en cuenta que esta parábola es tangente a los ejes en los puntos $(a, 0)$, $(0, a)$ y que es $y = [\sqrt{a} - \sqrt{x}]^2$).

R $\frac{1}{6} a^2$.

9. Determinar el área limitada por la curva, el eje de las abscisas y las ordenadas en los puntos indicados en los siguientes casos

a) $y = x^3$, $x = 2$, $x = 5$ R $152{,}25$.

b) $y = x^2 - x + 1$, $x = 0$, $x = 1$. R: $\frac{5}{6}$.

c) $y = x + \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 2$. R: $\frac{3}{2} + \ln 2$.

d) $y^2 = 2x + 4$, $x = -2$, $x = 0$ R $\frac{8}{3}$.

e) $xy = 1$, $x = 1$, $x = 3$. R $\ln 3$.

f) $y = \frac{1}{1 + x^2}$; $x = 0$, $x = 1$. R $\frac{1}{4}\pi$

g) $y = \frac{1}{1 - x^2}$; $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$. R· $\frac{1}{2}\ln 3$.

10. Calcular el área encerrada por las curvas

$$2y^2 - 3y = x - 1, \quad y^2 - 2y = x - 3$$

R $\frac{9}{2}$.

11. Calcular el área encerrada por las curvas

$$y = 3x^2 - x - 3, \qquad y = -2x^2 + 4x + 7$$

R: $\frac{45}{2}$.

12. Determinar el área encerrada por los siguientes pares de curvas

a) $\begin{cases} y^2 = x \\ x - y = 2. \end{cases}$

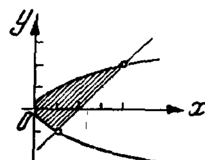
R: 4,5.

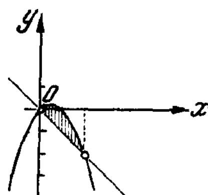
b) $\begin{cases} y = x - x^2. \\ y = -x. \end{cases}$

R· $\frac{4}{3}$.

c) $\begin{cases} y = x^3 - x. \\ y = x \end{cases}$

R 2





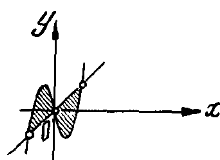


FIG XI-24

13 Determinar el área encerrada por el eje x y la curva (una onda simple)

$$y = \operatorname{sen} 2x$$

R 1

14 Determinar el área limitada por una onda de la curva

$$y = \cos \frac{1}{2} x$$

y el eje de las abscisas.

R 4

15. Determinar el área limitada por el eje x, cada una de las siguientes curvas trigonométricas y las 2 ordenadas que corresponden a una distancia igual a un período de la curva

a) $y = \operatorname{sen}^2 x$ R $\frac{1}{2}\pi$.

b) $y = \cos^3 3x$ R $\frac{8}{9}$.

c) $y = \cos \frac{1}{2} x$. R 8

d) $y = \cos 2x + \cos x$ R $3\sqrt{3}$.

e) $y = \operatorname{sen} \frac{2}{3} x$ R 6

(En todos los casos tómese la suma de los valores absolutos de las areas parciales que resultan de las intersecciones de la curva y el eje x Trácese en cada caso la gráfica correspondiente)

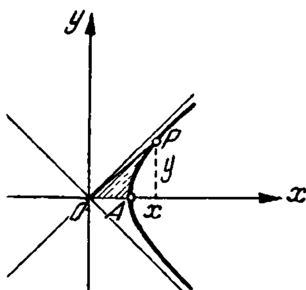


FIG XI-25

16 Verificar que el área de la elipse de semiejes a y b es igual al producto πab (Procédase como en el ejemplo 4º de la pág 367)

17 Calcular el área limitada por la hipérbola

$$x^2 - y^2 = 4 \quad \text{y la recta } x = 4$$

R $8\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})^4$

18 Hallar la expresion general del área limitada por la hipérbola equilatera

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

el eje x y una recta que une el origen con un punto cualquiera de la curva (sector hiperbólico)

R· $\frac{1}{2}a^2 \ln \frac{x + y}{a} = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{Arg Ch} \frac{x}{a}$

19 Sean A y B dos puntos de la hipérbola equilatera

$$xy = K.$$

Demostrar que el área limitada por el arco AB, las ordenadas de A y de B y el eje x es igual al área limitada por AB, las abscisas de A y de B y el eje y.

20 Determinar el área limitada por la hipérbola

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

el eje x y la ordenada en un punto cualquiera Aplíquese al caso de la hipérbola equilátera $(a = b)$ y obsérvese su relación con el área del sector hiperbólico (ej 18)

R $\frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}ab \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}ab. \operatorname{Arg Ch}\frac{x}{a}.$

21 Determinar el área comprendida entre el eje x la curva

$$y = e^x - e^{-x}$$

y las ordenadas de $x = 0$, $x = 2$

Verifique el resultado observando que es $y = 2 \operatorname{Sh} x$.

R $e^2 - e^{-2} - 2$

22 Dada la catenaria

$$y = \frac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

determinar el área limitada por la curva, el eje x y las verticales $x = a$, $x = -a$

Verifique el resultado partiendo de la ecuacion de la catenaria $y = a \operatorname{Ch}\frac{x}{a}$.

R $a^2(e - e^{-1})$

23 Determinar el área encerrada por la curva

$$y = x\,e^x$$

el eje x y la recta $x = 2$

R $1 + e^2$

24 Determinar el área limitada por la curva

$$y = x(\ln x)^2$$

el eje x y las ordenadas de $x = 1$, $x = e$

R $\frac{1}{4}(e^2 - 1)$

25 Calcular en qué relación, las siguientes curvas dividen al cuadrado con vértice en el origen y en los puntos $(0, 1)$, $(1, 0)$ $(1, 1)$

a) $y = x^3$ R 3

b) $y^3 = x^2$. R $\frac{3}{2}$.

c) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1.$ R $-1 + \dfrac{32}{3\pi}$

d) $y = \operatorname{tg} \frac{1}{4} \pi x$ R. $\dfrac{\pi - \ln 4}{\ln 4}.$

26. Determinar el área limitada por la curva

$$x^2 y = x^2 + 1$$

y las rectas $x = 1$, $y = 1$, $x = 4$

R. $\frac{3}{4}$.

27 Calcular el área encerrada por un folio de la curva

$$4y^2 = x^2(4 - x)$$

R. $\frac{128}{15}$.

28 Determinar el área encerrada por la curva

$$y^2 = x^2(x^2 - 1)$$

y la recta $x = 2$.

R $2\sqrt{3}$

29 Determinar el área encerrada por la curva

$$y^2 = x^2(x - 1)$$

y la recta $x = 3$

R $\frac{88}{15}\sqrt{3}.$

30 Determinar el área encerrada por un folio de la curva

$$y^2 = x(x - 1)^2$$

R $\frac{8}{15}$.

31 Determinar el área encerrada en el primer cuadrante por cada una de las siguientes curvas, el eje y y la primera intersección con el eje x

a) $x + 2y + y^2 = 4$ R $\frac{1}{3}(10\sqrt{5} - 14)$

b) $y = e^x \operatorname{sen} x.$ R $\frac{1}{2}(1 + e^{\pi}).$

c) $y^2 = (1 - x)^3$ R $\frac{2}{5}$.

d) $y = \cos(x - 1)$ R $1 + \operatorname{sen} 1$

7. VALOR MEDIO Y VALOR EFICAZ DE UNA FUNCION

VALOR MEDIO· Cuando se tiene una sucesión de valores

$$y_1,\ y_2,\ \ldots\ ,\ y_n,$$

se llama *valor medio* o promedio al número

$$\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$$

En el caso de una variable *continua* $y(x)$ en un intervalo (a, b), se llama valor medio, como ya hemos visto, al número μ definido por la relación

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$$

EJEMPLOS

1º) El valor medio de la función

$$y = \operatorname{sen} x$$

en el intervalo $\left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$ es $\mu = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\, dx = \frac{2}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \sim 0\,636$

2º) El valor medio de la funcion

$$y = \ln x$$

en el intervalo $(1, e)$ es

$$\mu = \frac{1}{e-1}\int_1^e \ln x\, dx = \frac{1}{e-1}\Big[x \ln x - x\Big]_1^e = \frac{1}{e-1} \sim 0{,}58$$

3º) Los valores medios de todas las funciones

$$y = A \operatorname{sen} x$$

en el intervalo $(0, 2\pi)$ son nulos cualesquiera sean las amplitudes A

En efecto, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A \operatorname{sen} x\, dx = \frac{A}{2\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{2\pi} = 0$

La anulación de los valores medios se debe a la compensación de las áreas positivas y negativas de estas sinusoides en un período completo

VALOR EFICAZ· Para caracterizar mejor funciones diferentes que tienen valores medios iguales introducimos el concepto de *valor eficaz* de uso muy frecuente en la técnica

Dada la función $y = f(x)$, calcularemos el valor medio del *cuadrado* de $f(x)$ en el intervalo (a, b)

$$\sigma^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\, dx$$

Este valor es esencialmente positivo y no puede suceder, como en el caso del valor medio, que se anule por compensación de áreas.

A la raíz cuadrada de este número se le llama *valor eficaz* de la función $y = f(x)$ en el intervalo (a, b).

EJEMPLOS

1°) Valor eficaz de la función

$$y = \text{sen } x$$

en el intervalo $(0, 2\pi)$.

Puesto que es $\int_0^{2\pi} \text{sen}^2 x \, dx = \frac{1}{2}\Big[x - \text{sen } x \cdot \cos x \Big]_0^{2\pi} = \pi$

resulta

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{\pi}{\pi}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

2°) Valor eficaz de la función

$$y = A \text{ sen } x$$

en el intervalo $(0, 2\pi)$

Resulta $\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, A \sim 0{,}707\, A$

3°) Valor eficaz de la función

$$I = I_0 \cos 2\pi \frac{t}{T} \qquad [1]$$

en el intervalo $(0, T)$.

Resulta $\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, I_0$

4°) *Aplicación física.* Consideremos una corriente alternada cuya intensidad está dada por la expresion [1], siendo I_0 la amplitud y T el periodo.
Si esta corriente alternada pasa por un instrumento de hilo caliente, la cantidad de calor que desarrolla en un período T, es, de acuerdo a la ley de Joule

$$\int_0^T I^2 R\, dt = I_0^2 R \int_0^T \cos^2 2\pi\frac{t}{T}\, dt = I_0^2 R \frac{T}{4\pi}\left[\frac{2\pi t}{T} + \text{ sen}\frac{2\pi t}{T}\cos\frac{2\pi t}{T}\right]_0^T = \frac{1}{2} I_0^2 RT,$$

llamando R a la resistencia óhmica del instrumento.
Ahora bien, una corriente *continua* de intensidad I^* desarrolla en el mismo aparato, en el intervalo T, la cantidad de calor

$$\int_0^T I^{*2} R\, dt = I^{*2} RT$$

Igualando los valores hallados, se tiene

$$I^{*2} RT = \frac{1}{2} I_0^2 RT$$

y resulta

$$I^* = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, I_0 \sim 0{,}707\, I_0,$$

que es precisamente el valor hallado en el ejemplo 3°) para el valor eficaz

de I. Por eso se designa habitualmente a I^* como valor eficaz I_{ef} de la intensidad de la corriente alternada I.

También se considera la tensión eficaz E_{ef} de una corriente alternada cuya tensión E es $E_0 \cos 2\pi \frac{t}{T}$ y resulta igual a $0{,}707\, E_0$

8. INTEGRACION NUMERICA APROXIMADA

Cuando no se conoce la primitiva de una función subintegral no se puede aplicar la fórmula de Barrow y se recurre entonces a procedimientos aproximados. Ya hemos visto como se procede gráficamente.

Ahora consideraremos otros procedimientos numéricos que permitirán calcular las integrales definidas

$$\int_a^b f(x)\, dx, \qquad [1]$$

donde $f(x)$ es una función dada o bien por su expresión analítica o por una *tabla de valores equidistantes* corespondientes a los valores x que resultan de dividir el intervalo de integración (a, b) en n partes iguales.

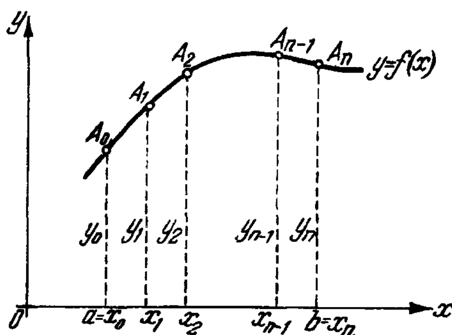


FIG XI-26

1°) FÓRMULA DE LOS TRAPECIOS· Interpretada la integral definida [1] como el área de la superficie limitada por la curva $y = f(x)$, el eje de las abscisas y las ordenadas corespondientes a $x = a$, $x = b$, podemos considerar esa superficie como la suma de las superficies $aA_0A_1x_1$; $x_1A_1A_2x_2$, ..., de la figura.

A su vez el área de cada una de esas superficies parciales puede considerarse *aproximadamente* igual al área del trapecio que tiene los mismos vértices. Como el área de un trapecio es igual a la semisuma de las medidas de las bases por la medida de la altura, resulta, llamando h al valor común de esa altura $\frac{b-a}{n}$:

$$\text{Area } (aA_0A_1x_1) \sim \frac{1}{2}(y_0 + y_1)h$$

$$\text{Area } (x_1A_1A_2x_2) \sim \frac{1}{2}(y_1 + y_2)h$$

....

$$\text{Area } (x_{n-1}A_{n-1}A_nb) \sim \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)h.$$

Sumando resulta la *fórmula de los trapecios:*

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \frac{1}{2}h(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n) =$$

$$= h\left[\frac{1}{2}E + \sum_1^{n-1} y_i\right],$$

donde $E = y_0 + y_n$, designa la suma de las ordenadas extremas y la sumatoria que aparece corresponde a todas las ordenadas desde la segunda a la penúltima.

EJEMPLO Sea calcular $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 + x^3}}$.

La funcion subintegral carece de primitiva expresable mediante funciones elementales Aplicaremos la fórmula de los trapecios dividiendo el intervalo (0, 1) en 10 partes iguales, con lo cual resultará $h = 0{,}1$.

x	$f(x)$
0	0,707
0,1	0,706
0,2	0,705
0,3	0,702
0,4	0,696
0 5	0,686
0,6	0,672
0,7	0,653
0,8	0,631
0,9	0,605
1	0,577

La suma de las ordenadas extremas es $E = 0{,}707 + 0{,}577 = 1{,}284$ y la suma de las 9 ordenadas interiores es igual a 6,056

La fórmula de los trapecios da entonces

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 + x^3}} \sim 0{,}1\left[\frac{1{,}284}{2} + 6{,}056\right] = 0{,}670$$

Más adelante (Cap XV), calcularemos este mismo ejemplo utilizando un desarrollo en serie de potencias

En la fórmula de los trapecios se ha sustituído la curva por una poligonal inscripta Mejor aproximación (fórmula de Simpson) se obtiene reemplazando cada arco de la curva dada correspondiente a 3 valores x_{i-1}, x_i, x_{i+1} por un arco de parábola

2º) FÓRMULA DE SIMPSON Antes de hallar la expresión general de la fórmula, determinemos el área comprendida entre Ox, la parábola de eje vertical que pasa por tres puntos dados A_0, A_1, A_2 (fig 27) y las ordenadas extremas Supondremos que los puntos A_0, A_1, A_2 tienen abscisas equidistantes

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = h$$

y consideremos que el eje de las ordenadas pasa por el punto intermedio A_1

La parábola de eje vertical tiene por ecuación

$$y = ax^2 + bx + c$$

y debiendo pasar por A_0, A_1, A_2 deberán ser satisfechas las relaciones:

$$\begin{cases} y_0 = a(-h)^2 + b(-h) + c. \\ y_1 = c. \\ y_2 = a(+h)^2 + b(+h) + c. \end{cases} \qquad [2]$$

El área buscada es:

$$\int_{-h}^{+h} (ax^2 + bx + c)\, dx = \left[a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx\right]_{-h}^{+h} = \frac{2}{3}ah^3 + 2\,ch. \qquad [3]$$

Si formamos la expresión $\frac{1}{3}h(y_0 + 4\,y_1 + y_2)$, obtenemos de acuerdo a las relaciones [2]:

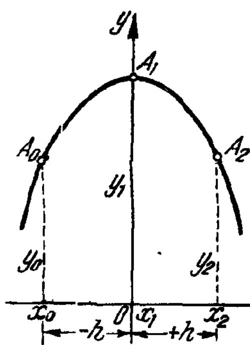


Fig XI-27

$$\frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + y_2) =$$

$$= \frac{1}{3}h(ah^2 - bh + c + 4c + ah^2 + bh + c) =$$

$$= \frac{1}{3}h(2ah^2 + 6c) = \frac{2}{3}ah^3 + 2ch,$$

que es el valor antes obtenido en [3]. Luego queda demostrada la relación exacta, en el caso que y sea una parábola vertical.

$$\int_{-h}^{+h} y\, dx = \frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + y_2). \qquad [4]$$

Así como el conocimiento de las 2 ordenadas extremas era suficiente para hallar el área que limita el segmento de recta (caso del trapecio), el conocimiento de 3 ordenadas equidistantes es suficiente para determinar el área limitada por un arco de parábola cuadrática.

Para deducir la fórmula de Simpson consideremos ahora nuevamente la figura 26, suponiendo que n es par. Cada 3 puntos consecutivos queda determinada una parábola vertical que se aproxima a la curva $y = f(x)$ en el intervalo correspondiente. El área de la curva es *aproximadamente* igual al de la parábola y el de ésta está dado por la fórmula [4].

$$\text{Area del primer sector} = \frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

$$\text{Area del segundo sector} = \frac{1}{3}h(y_2 + 4y_3 + y_4).$$

. . . .

$$\text{Area del } \frac{1}{2} n\text{-simo sector} = \frac{1}{3}h(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

Sumando todas estas igualdades resulta:

$$\text{Area} \sim \frac{1}{3} h(E + 4I + 2P),$$

donde E significa como antes la suma de las ordenadas extremas y_0 e y_n; I la suma de las ordenadas de índice impar (y_1, y_3, ...) y P la suma de las ordenadas de índice par (y_2, y_4, ...).

Para aplicar la fórmula de Simpson al caso de la integral

$$\int_2^{10} \ln x \, dx$$

podemos disponer el cálculo en la siguiente forma, utilizando una tabla de logaritmos naturales de 5 decimales

x	E	I	P
2	0,69315		
3		1,09861	
4			1.38629
5		1,60944	
6			1,79176
7		1,94591	
8			2,07944
9		2,19722	
10	2,30259		
Sumas	2.99574	6,85118	5,25749
Coeficientes	× 1	× 4	× 2
	2.99574	27,40472	10,51498
Total	40,91544		
$\times \frac{1}{3}h$	13,6385		

Por consiguiente es $\int_2^{10} \ln x \, dx \sim 13{,}6385.$

Error en la fórmula de Simpson: Se demuestra (1) que el error cometido en la determinación aproximada de una integral definida mediante la fórmula de Simpson es inferior a

(1) Ver por ejemplo, M. Sadosky, *Cálculo numérico y gráfico*, pág. 242.

$$\frac{h^4}{180}(b-a)\,M,$$

siendo $(b-a)$ la longitud del intervalo de integración y M una cota superior de la derivada cuarta $f^{IV}(x)$ en (a, b)

En el ejemplo que hemos considerado, por ser $f(x) = \ln x$, resulta $f^{IV}(x) = \frac{6}{x^4}$, cuyo valor absoluto, es siempre inferior a $6/2^4 = 0{,}375$ Entonces designando con ε el error de la formula de Simpson, resulta

$$\varepsilon < \frac{1}{180}(10-2)0{,}375 < 0{,}017$$

En este caso es facil verificar que la aproximacion obtenida es mucho mayor porque la primitiva de $y = \ln x$ es $x(\ln x - 1)$ y se puede ver que el valor obtenido 13,6385 difiere del exacto 13,6395 en 0,001

De acuerdo a la expresión del error resulta que todo polinomio de 2° o 3er grado es integrable *exactamente* mediante la fórmula de Simpson

EJERCICIOS

Calcular con las formulas de los trapecios y de Simpson las integrales definidas

1 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ 5 $\int_1^2 \frac{dx}{x}$

2 $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$ 6 $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$

3 $\int_0^2 x^2\,dx$ 7 $\int_1^8 \sqrt{60+x}\,dx$

4 $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{8+x}}$ 8 $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{64-x^2}}$

y comparar con los resultados exactos obtenidos con la regla de Barrow

Calcular el valor aproximado de las siguientes integrales definidas, aplicando la regla de Simpson

9 $\int_0^2 \sqrt{1+x^3}\,dx.$ R 3,239

10 $\int_0^\pi \sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx$ R 2,28

11 $\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ R 1,85.

12 $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ R 0,74682

13 $\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx$ R 0,3103

14 $\int_0^{0,5} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ R 0,2483

(Los resultados obtenidos corresponden a 4 subdivisiones del intervalo de integración.)

9. AREA EN COORDENADAS PARAMETRICAS

Si una curva está dada en coordenadas paramétricas:

$$x = f(t), \qquad y = g(t),$$

puesto que es $dx = f'(t)\,dt$ resulta el área

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_{t_0}^{t_1} g(t)\cdot f'(t)\,dt,$$

siendo t_0 y t_1 los valores del parámetro t que corresponden, respectivamente, a los valores a y b de la variable x.

EJEMPLOS:

1°) Calcular el area del círculo de radio r y centro en el origen.

Siendo las ecuaciones parametricas de la circunferencia

$$x = r\,\text{sen}\,t, \qquad y = r\cos t,$$

para t variando de 0 a $\frac{1}{2}\pi$ se tendrá el cuarto de círculo OAB.

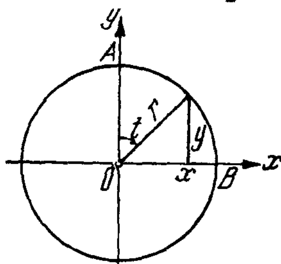


FIG. XI-28

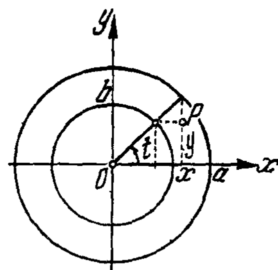


FIG. XI-29

Llamando A al área buscada, será

$$\frac{1}{4}A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos t\cdot r\cos t\,dt = r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}r^2\Big[\,t + \text{sen}\,t\cdot\cos t\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4}\pi r^2,$$

con lo que resulta $A = \pi r^2$.

2°) Siendo las ecuaciones paramétricas de la elipse de semiejes a y b

$$x = a\cos t, \qquad y = b \operatorname{sen} t,$$

resulta procediendo como en el ejemplo 1°.

$$\frac{1}{4}A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \operatorname{sen} t \cdot (-a \operatorname{sen} t)\, dt = -ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 t\, dt = -\frac{1}{4}\pi ab,$$

con lo que se obtiene $A = -\pi ab$

(El porqué del signo menos lo explicamos en la pág. 385).

EJERCICIOS

1 Verificar que el área encerrada por un arco de la cicloide

$$\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

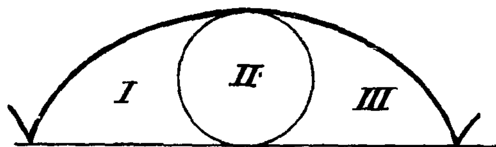


FIG XI-30

y el eje x es igual a $3\pi a^2$, es decir es el triple del área del círculo generador Resulta entonces que las superficies I, II, III de la figura son iguales.

2 Verificar que el área encerrada por la cardioide

$$\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t) \end{cases}$$

es $6\pi a^2$.

3 Determinar el área limitada por el eje x, la hipérbola

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}a(e^t + e^{-t}) \\ y = \frac{1}{2}a(e^t - e^{-t}) \end{cases}$$

y la recta que pasa por el origen y corta a la curva en el punto (x_0, y_0)

R $\frac{1}{2}a^2 \ln\left(\frac{x_0 + y_0}{a}\right)$

4 Determinar el área limitada por la hipérbola

$$\begin{cases} x = 2\sec t \\ y = 2\operatorname{tg} t \end{cases}$$

y la recta $x = 4$

R $8\sqrt{3} - 4\ln(2 + \sqrt{3})$.

5 Verificar que el área encerrada por la hipocicloide

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a \operatorname{sen}^3 t \end{cases}$$

es $\frac{3}{8}$ del area del círculo correspondiente

6 Verificar que el área encerrada por la hipocicloide

$$\begin{cases} x = 2r\cos t + r\cos 2t \\ y = 2r \operatorname{sen} t - r \operatorname{sen} 2t \end{cases}$$

es igual a $2\pi r^2$

7 Verificar que el área determinada por la parábola

$$\begin{cases} x = a\cos^4 t \\ y = a \operatorname{sen}^4 t \end{cases}$$

y los ejes coordenados es igual a $\frac{1}{6}a^2$.

(Compárese con el resultado obtenido en el ej 8 del § 6. pág 370)

10. AREAS ORIENTADAS

I) Hemos visto cómo se pueden determinar las áreas limitadas por una curva correspondiente a una función $y = f(x)$ mediante la integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx$$

Cuando x varía de a hacia b el punto sobre la curva varía de A hacia B.

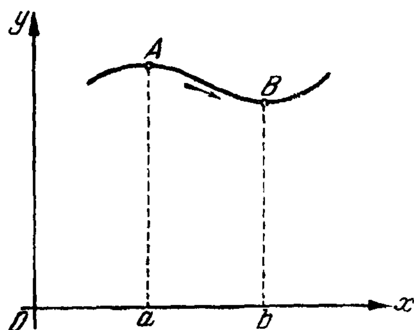


FIG XI-31

Podemos ampliar esta interpretación y considerar que el punto (x, y) varía sobre todo el contorno $aABb$ Sobre los segmentos aA y Bb los productos $y \cdot dx$ son nulos por ser en ellos $x =$ constante y sobre el segmento ba también el producto es nulo por ser $y = 0$. De modo que podemos decir que cuando el punto (x, y) describe un contorno $aABb$ la expresión $\int_a^b y\,dx$ proporciona el área encerrada por ese contorno cuando se lo recorre de acuerdo al *sentido* indicado por la flecha. Pero este sentido es, en el caso de la figura, *negativo*. pues en matemática se elige como *sentido positivo*, aquel que al recorrer su contorno deje el área a la izquierda.

En esta forma resulta que el área, con su signo está dado por

$$A = -\int_C y\,dx,$$

donde C indica el contorno de la figura recorrido en sentido positivo [1].

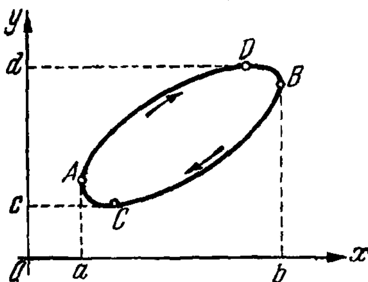


Fig XI-32

II) Consideremos ahora el caso de un recinto limitado por una curva cerrada que supondremos es cortada por cualquier paralela al eje de las x, o de las y, a lo sumo en 2 puntos.

Habitualmente, si llamamos $y_2(x)$ a la función, definida en (a, b), que describe el arco ADB, e $y_1(x)$ a la función del mismo intervalo que describe el arco ACB, se calcula el área encerrada por la curva mediante una diferencia de integrales definidas

$$A = \int_a^b y_2(x)\, dx - \int_a^b y_1(x)\, dx = \int_a^b y_2(x)\, dx + \int_b^a y_1(x)\, dx.$$

donde se ha cambiado el signo de la segunda integral por haber invertido el orden de los extremos a y b del intervalo de integración.

Aquí también se puede escribir

$$A = -\int_C y\, dx,$$

donde los valores x e y corresponden a las coordenadas de los puntos de la curva C. El signo menos se debe a que el sentido que aparece en la figura es el negativo (En efecto, un observador que recorriera el contorno C vería el recinto a la derecha)

III) En el caso de una curva de ecuación $x = x(y)$, el área limitada por el eje de las y, las rectas $y = c$, $y = d$ y la curva, es, como ya vimos,

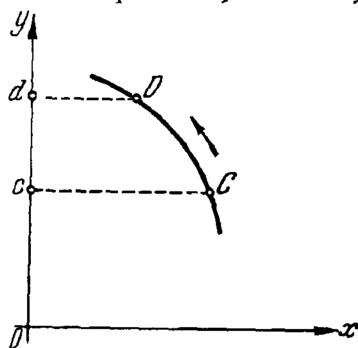


Fig. XI-33.

$$A = \int_c^d x(y)\, dy,$$

que también se puede escribir

$$A = \int_C x\, dy,$$

siendo (x, y) un punto cualquiera del contorno $cCDd$ que limita el recinto.

(1) Escrita en esta forma, el área resulta expresada por una "integral curvilínea", tema que desarrollaremos ampliamente en el volumen II. En este párrafo sólo hemos querido tratar un caso particular que permite estudiar las áreas de las superficies con su signo.

En este caso el signo es positivo pues la figura muestra que cuando la variable y va de c a d, el punto sobre la curva va de C a D de modo tal que un observador que recorriera el contorno de acuerdo a este sentido vería el área a su *izquierda.*

Para un caso como el de la figura también resultaría, razonando como antes:

$$A = \int_C x\, dy.$$

De las 2 expresiones para el área

$$A = -\int_C y\, dx = +\int_C x\, dy,$$

resulta la relación general

$$A = \frac{1}{2}\int_C x\, dy - y\, dx.$$

EJEMPLO:

Calcular el área de una elipse de semiejes a y b dada en coordenadas paramétricas por las relaciones:

$$x = a\cos t, \qquad y = b\,\mathrm{sen}\, t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Como es $dx = -a\,\mathrm{sen}\, t\, dt$, $dy = b\cos t\, dt$, resulta

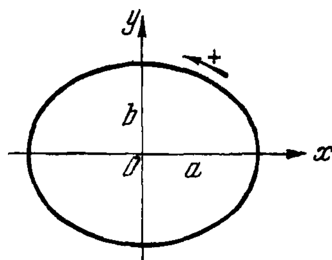


FIG. XI-34.

$$\frac{1}{2}(x\, dy - y\, dx) =$$

$$= \frac{1}{2}\,(ab\cos^2 t + ab\,\mathrm{sen}^2 t)\, dt = \frac{1}{2}ab\, dt$$

y el área es

$$A = \frac{1}{2}\int_C x\, dy - y\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt = \frac{1}{2}ab \cdot 2\pi = \pi ab.$$

Obsérvese que cuando t varía de 0 a 2π, el punto recorre el contorno en sentido positivo. En cambio, de haber partido de las relaciones

$$x = a\,\mathrm{sen}\, t, \qquad y = b\cos t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

que también describen la misma elipse pero en sentido negativo, hubiera resultado

$$\frac{1}{2}(x\, dy - y\, dx) = \frac{1}{2}(-ab\,\mathrm{sen}^2 t - ab\cos^2 t)\, dt = -\frac{1}{2}ab\, dt$$

y el área, con su signo, habría sido $A = -\pi ab$.

11. AREA EN COORDENADAS POLARES

Consideremos una curva dada en coordenadas polares mediante la función $\varrho = \varrho(\vartheta)$. Definiremos el área de la superficie comprendida entre esta curva y los rayos OA y OB correspondientes a los argumentos $\vartheta = \alpha$ y $\vartheta = \beta$.

Para ello dividimos el ángulo BOA en n partes $\Delta\vartheta_1$, $\Delta\vartheta_2$, ..., $\Delta\vartheta_i$, ..., $\Delta\vartheta_n$, iguales o desiguales. Al ángulo $\Delta\vartheta_i$ le corresponde el arco MN y llamaremos $\varrho_i = OP_i$ al radio vector correspondiente a un argumento cualquiera interior a $\Delta\vartheta_i$. Con centro O y radio $OP_i = \varrho_i$, trazamos el arco de circunferencia RS. El área del *sector circular* ORS es, como se sabe por geometría elemental: $\frac{1}{2}\varrho_i^2\,\Delta\vartheta_i$.

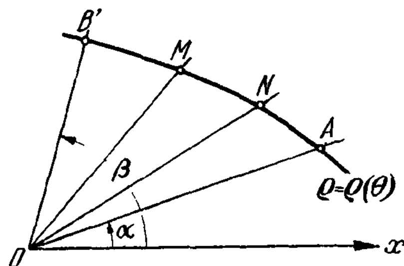


Fig XI-35.

Efectuamos la misma operación en cada uno de los n sectores análogos al OMN y formamos la suma finita de las áreas de los sectores circulares correspondientes:

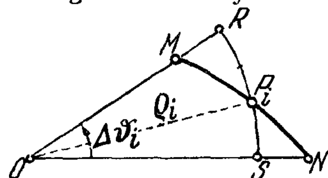


Fig XI-36.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\varrho_i^2\,\Delta\vartheta_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\varrho_i^2\,\Delta\vartheta_i.$$

Calculamos el límite de esta expresión cuando $n \to \infty$ (y cada uno de los $\Delta\vartheta_i$ tiende a cero). Si este límite existe y es finito es por definición el área A del sector OAB:

$$A = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\varrho_i^2\,\Delta\vartheta_i.$$

Ahora bien, de acuerdo a la definición de integral definida, el límite de esta sumatoria es la integral definida

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\varrho^2\,d\vartheta.$$

Ejemplos

1°) Hallar el área de la superficie correspondiente a $\varrho = \operatorname{sen}\vartheta$ cuando ϑ varía entre 0 y π

Resulta

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \varrho^2 \, d\vartheta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 \vartheta \, d\vartheta = \frac{1}{4}\Big[\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta \cdot \cos\vartheta\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{4}\pi$$

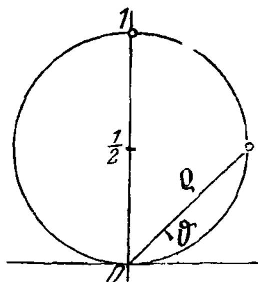


FIG. XI-37

(Es fácil verificar este resultado por cuanto la curva es una circunferencia de radio $\frac{1}{2}$, como se ve escribiendo la ecuación $\varrho = \operatorname{sen}\vartheta = \frac{y}{\varrho}$, en la forma $\varrho^2 - y = 0$ o sea $x^2 + y^2 - y = 0$)



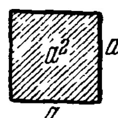


FIG. XI-38

2°) Calcular el área encerrada por la lemniscata de Bernoulli $\varrho^2 = a^2 \cos 2\vartheta$. Por razones de simetría se ve que el área buscada es 4 veces el area comprendida entre 0 y $\frac{1}{4}\pi$

$$A = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \varrho^2 \, d\vartheta = 2a^2 \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \cos 2\vartheta \, d\vartheta = a^2\Big[\operatorname{sen} 2\vartheta\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} = a^2$$

3°) Calcular el área encerrado por $\varrho = a \operatorname{sen} n\vartheta$

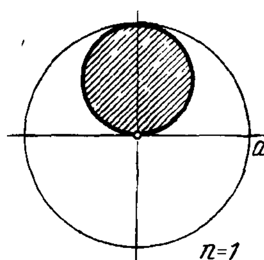
La aplicación directa de la fórmula daría

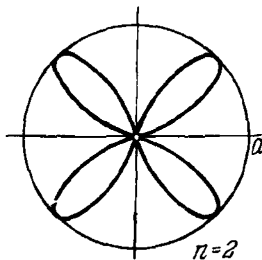
$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varrho^2 \, d\vartheta =$$

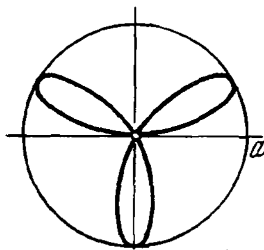
$$= \frac{1}{2}a^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 n\vartheta \, d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{a^2}{n}\Big[n\vartheta - \frac{\operatorname{sen} 2n\vartheta}{2}\Big]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\pi a^2.$$







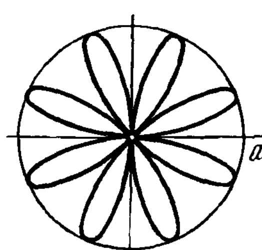


FIG. XI-39 $\varrho = a \operatorname{sen} n\vartheta$

pero habrá que observar que para n *impar* al variar ϑ de 0 a 2π se recorre 2 veces la misma curva. En consecuencia resulta

$A = \frac{1}{2}\pi a^2$ si n es *par*, $\qquad A = \frac{1}{4}\pi a^2$ si n es *impar*.

Nota: Estas curvas llamadas folios de n hojas aparecen en la teoría de las antenas y será conveniente que el lector las bosqueje para los valores $n = 1, 2, 3, 4$, tal como aparecen en la figura 39 señalando el sentido del recorrido del arco al crecer ϑ.

Relaciones entre las expresiones de las áreas en coordenadas polares y paramétricas: La ecuación de una curva en coordenadas polares es $\varrho = \varrho(\vartheta)$, donde ϑ es el argumento y ϱ el radio vector

Como es

$$x = \varrho \cos \vartheta, \qquad y = \varrho \operatorname{sen} \vartheta, \qquad [1]$$

resultan x e y funciones de un parámetro ϑ, pues para cada valor de este parámetro se obtiene un valor de x y un valor de y correspondiente a la curva

Diferenciando las relaciones [1] se obtiene

$$dx = d\varrho \cdot \cos \vartheta - \varrho \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta,$$

$$dy = d\varrho \cdot \operatorname{sen} \vartheta + \varrho \cos \vartheta \, d\vartheta,$$

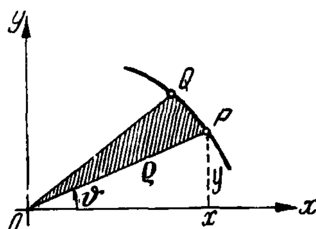


Fig. XI-40

con lo cual resulta

$$\frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}(\varrho\, d\varrho \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta + \varrho^2 \cos^2 \vartheta \, d\vartheta -$$

$$- \varrho\, d\varrho \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta + \varrho^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta \, d\vartheta) = \frac{1}{2}\varrho^2 \, d\vartheta,$$

que es precisamente el elemento de área en coordenadas polares.

Ejercicios:

1 Calcular el área encerrada por los radios $\vartheta = 0$ y $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ y cada una de las siguientes curvas:

a) $\varrho = \vartheta$ $\qquad$ R $\frac{1}{48}\pi^2$.

b) $\varrho = \vartheta^2$. $\qquad$ R: $\frac{1}{320}\pi^5$.

c) $\varrho = \sqrt{\vartheta}$ $\qquad$ R $\frac{1}{16}\pi^2$.

2. Demostrar que el área A limitada por dos radios cualesquiera de la espiral hiperbólica

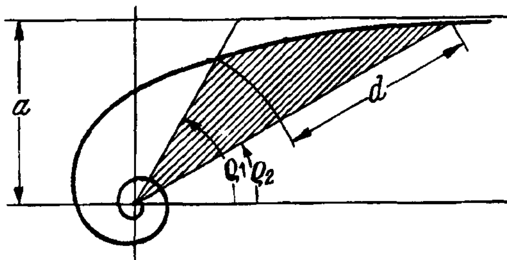


FIG. XI-41.

$$\varrho\vartheta = a.$$

es proporcional a la diferencia d entre las longitudes de dichos radios

R: $A = \frac{1}{2}ad.$

3. Calcular el área encerrada por cada una de las siguientes curvas:

a) $\varrho = \operatorname{sen}^2 2\vartheta.$

(Obsérvese que es 4 veces el área comprendida entre 0 y $\frac{1}{2}\pi$). R $\frac{3}{8}\pi.$

b) $\varrho = 1 + \operatorname{sen} 2\vartheta.$

(Obsérvese que es el doble del área comprendida entre $-\frac{1}{4}\pi$ y $+\frac{3}{4}\pi$).

R: $\frac{3}{2}\pi$

c) $\varrho = 2\cos\vartheta + 3\operatorname{sen}\vartheta.$

(Nótese que la integral debe hacerse entre 0 y π pues para los valores entre π y 2π vuelve a reproducirse la curva. Adviértase, para la verificación que se trata de una circunferencia de centro en $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ y radio $\sqrt{13} : 2$, haciendo el pasaje a coordenadas cartesianas).

R: $\frac{13}{4}\pi.$

d) $\varrho = \operatorname{sen} 3\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta.$

(Intégrese entre 0 y π).

R: $\frac{1}{2}\pi.$

4. Hallar el área limitada por el eje polar y la segunda y la tercera vuelta de la espiral

$$\varrho = 2\vartheta.$$

R: $\frac{1}{3}304\,\pi^3.$

5. Verificar que el área A limitada por la espiral

$$\varrho = a\,e^{k\vartheta}$$

y dos radios cualesquiera es proporcional a la diferencia de los cuadrados de estos radios.

6. Determinar el área limitada por la curva

$$\varrho = \operatorname{tg} \vartheta$$

y los radios correspondientes a los argumentos $\vartheta = 0$ y $\vartheta = \frac{1}{4}\pi$.

R: $\frac{1}{8}(4 - \pi)$.

7. Determinar el área limitada por la curva

$$\varrho = a \operatorname{sen} \vartheta + b \cos \vartheta$$

y los radios correspondientes a los argumentos $\vartheta = 0$ y $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$.

R: $\frac{1}{8}\pi(a^2 + b^2) + \frac{1}{2}ab$.

8 Determinar el área encerrada por un folio de la curva

$$\varrho^2 = 4 \operatorname{sen} 4\vartheta.$$

R: 1.

9 Determinar el area del folio interior de la trisectriz

$$\varrho = 2(1 - 2 \cos \vartheta).$$

R. $2(2\pi - 3\sqrt{3})$.

10 Trazar la curva

$$\varrho = 3 + 2 \cos \vartheta$$

y hallar su área.

R: 11π

11 Considérense las funciones

$$\varrho = \cos \vartheta; \qquad \varrho = \cos 2\vartheta$$

para ϑ variando entre 0 y $\frac{1}{2}\pi$. Calcúlese el área del primer cuadrante comprendido entre estas curvas y las semirrectas $\vartheta = 0$, $\vartheta = \frac{1}{4}\pi$.

R: $\frac{1}{8}$.

12 Verificar que el área encerrada por la cardioide

$$\varrho = 2a(1 + \cos \vartheta)$$

es igual a $6\pi a^2$.

13. Calcular el área de la curva

$$\varrho = 2a(1 + \cos \vartheta)$$

que está fuera de la parábola

$$\varrho = \frac{2a}{1 + \cos \vartheta}.$$

R: $3\pi a^2 + \frac{16}{3}a^2$.

14. Calcular el área común a los siguientes pares de curvas:

a) $\varrho = 3\cos\vartheta$; $\varrho = 1 + \cos\vartheta$. R: $\frac{5}{4}\pi$.

b) $\varrho = 1 - \operatorname{sen}\vartheta$; $\varrho = \cos\vartheta$. R: $\frac{1}{2}\pi - 1$.

c) $\varrho^2 = \cos 2\vartheta$; $\varrho^2 = \operatorname{sen} 2\vartheta$. R. $1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

15. Hallar el área encerrada por la curva

$$\varrho = 4\cos 2\vartheta.$$

Trácese la gráfica.

R 8π.

16 Determinar el área encerrada por la curva

$$\varrho^2 = 9\cos 2\vartheta.$$

R: 9.

17 Determinar el área encerrada por la curva

$$\varrho = 2(1 - \operatorname{sen}\vartheta)$$

R: 6π.

18 Determinar el área limitada por el círculo

$$\varrho = 2\operatorname{sen}\vartheta$$

y las rectas $\vartheta = 30°$ y $\vartheta = 60°$.

R: $\frac{1}{6}\pi$.

19 Calcular el área encerrada por la curva

$$\varrho = a(\operatorname{sen} 2\vartheta + \cos 2\vartheta)$$

R πa^2.

20 Hallar el área limitada por la parábola

$$\varrho(1 + \cos\vartheta) = 2$$

y las rectas $\vartheta = 0$ y $\vartheta = \frac{1}{3}\pi$

R: $\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

21 Calcular el área limitada por la curva del ejercicio anterior y las rectas $\vartheta = 0$, $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$.

R: $\frac{4}{3}$.

22 Determinar el área limitada por la hipérbola

$$\varrho^2 \cos 2\vartheta = 4$$

y las rectas $\vartheta = 0$ y $\vartheta = \frac{1}{6}\pi$.

R: $\ln(2 + \sqrt{3})$.

23. Determinar el área encerrada por las curvas

$$\varrho = \frac{4}{1 - \cos\vartheta}; \qquad \varrho = \frac{4}{1 + \cos\vartheta}.$$

R: $21\frac{1}{3}$.

24. Determinar el área común a los dos círculos

$$\varrho = a \operatorname{sen} \vartheta,$$
$$\varrho = a \cos \vartheta.$$

R: $\frac{1}{4}a^2\left(\frac{1}{2}\pi - 1\right)$

25. Verificar que el área limitada por la parábola

$$\varrho = \frac{a}{\cos^2 \frac{1}{2}\vartheta}$$

y los radios $\vartheta = 0$ y $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ es igual a $\frac{2}{3}$ del área del rectángulo de base a y altura $2a$ Efectúese la representación gráfica.

12. INTEGRALES GENERALIZADAS

En la definición de la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ hemos supuesto que los límites a y b eran finitos y que la función $f(x)$ era *acotada* (y prácticamente en la totalidad de los casos tratados era además continua).

Generalizaremos en dos formas este concepto de integral definida para el caso de un intervalo infinito y de una función no acotada introduciendo las siguientes definiciones:

I) Definiremos como $\int_a^\infty f(x)\,dx$ a la expresión

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

cuando este límite existe y es finito. En este caso se dice también que la integral es *convergente*. Si el límite es infinito se dice que la integral es *divergente* y si el límite es oscilante, la integral es *oscilante*.

EJEMPLOS:

1°) $$\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\Big[-e^{-x}\Big]_0^t = \lim_{t\to\infty}(e^0 - e^{-t}) =$$

$$= \lim_{t\to\infty}(1 - e^{-t}) = 1 - \lim_{t\to\infty} e^{-t} = 1 - 0 = 1.$$

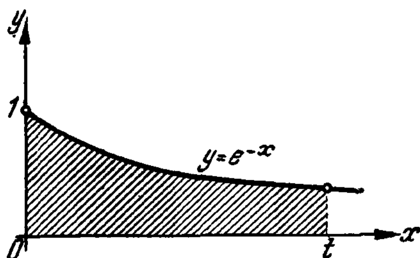


FIG. XI-42.

Gráficamente la integral calculada puede interpretarse como el área limitada por la función e^{-x} y el semieje positivo de las abscisas.

2°) $\int_0^{\infty} e^{-x}\operatorname{sen} x\,dx$. Siendo una primitiva de $e^{-x}\operatorname{sen} x$, la función $-\frac{1}{2}e^{-x}(\operatorname{sen} x + \cos x)$ es

$$\int_0^t e^{-x}\operatorname{sen} x\,dx = \frac{1}{2}\Big[1 - e^{-t}(\operatorname{sen} t + \cos t)\Big]$$

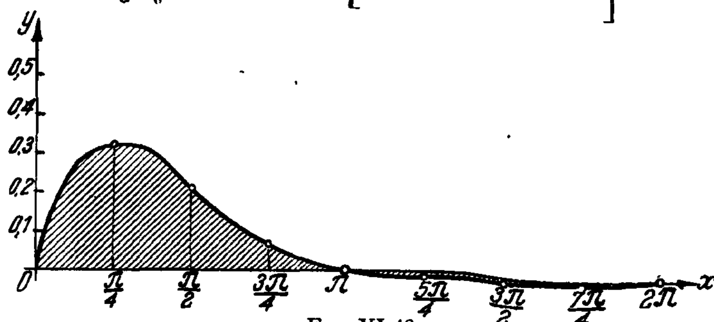


FIG. XI-43.

y el límite de esta expresión cuando $t\to\infty$ es $\frac{1}{2}$. La integral es *convergente.*

3°) $$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{t\to\infty}\Big[\ln x\Big]_1^t = \lim(\ln t) = \infty.$$

La integral es *divergente.*

4°) $$\int_0^{\infty}\operatorname{sen} x\,dx = \lim_{t\to\infty}\Big[-\cos x\Big]_0^t = \lim_{t\to\infty}(1 - \cos t)$$

y este límite oscila entre 0 y 2. La integral es *oscilante.*

5°) Determinar para qué valores positivos de α está definida la expresión

$$I(\alpha) = \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}.$$

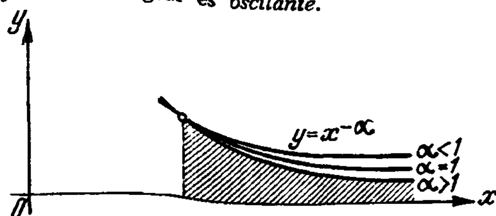


FIG. XI-44.

Puesto que es

$$\int_1^t \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^t = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{t^{\alpha-1}} - 1\right),$$

la integral estará definida siempre que el límite de esta expresión para $t \to \infty$ exista y sea finito, advirtiendo desde ya que la fórmula es válida si es $\alpha \neq 1$.

Para $\alpha > 1$, $\frac{1}{t^{\alpha-1}}$ cuando $t \to \infty$, tiende a 0 y resulta entonces $I(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$.

Para $\alpha < 1$, $\frac{1}{t^{\alpha-1}} = t^{1-\alpha}$ tiende a ∞ cuando $t \to \infty$. Para $\alpha = 1$, resulta una integral divergente de acuerdo a lo visto en el ejemplo 3º.

En definitiva $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ solo converge si es $\alpha > 1$.

NOTA: Obsérvese que cualquiera sea el valor de $\alpha > 1$, el área rayada en la figura resulta finita. Así resulta

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1,001}}$$

convergente, mientras que es divergente

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x}.$$

6º) Calcular

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}.$$

Si bien hemos definido hasta ahora $\int_a^\infty f(x)\,dx$, se entiende que también se podrá definir $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ calculando el límite de $\int_{-t}^a f(x)\,dx$ cuando $t \to \infty$.

En este caso procederemos así:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[-\operatorname{arc\,tg}(-t)\right] + \lim_{t\to\infty}\left[\operatorname{arc\,tg} t\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi = \pi.$$

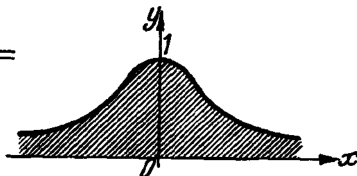


FIG. XI-45.

II) Si $f(x)$ es una función que tiene discontinuidad infinita en uno de los extremos del intervalo de integración, se adoptan las siguientes definiciones:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

cuando la discontinuidad se presenta en $x = b$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx,$$

cuando la discontinuidad se presenta en $x = a$.

Si la discontinuidad se presenta en un punto c interior del intervalo de integración adoptaremos la siguiente definición:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{c+\varepsilon'}^b f(x)\,dx.$$

En particular si se elige $\varepsilon = \varepsilon'$, el límite que así resulta se llama *valor principal.*

EJERCICIOS:

Verificar las siguientes integrales definidas:

1. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{8}.$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(1-x)^2} = 1.$

3 $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^x\,dx = 1.$

4 $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1-x}$ (divergente).

5. Idem que $\displaystyle\int_0^\infty \cos x\;dx$ es oscilante.

Verificar las siguientes integrales definidas.

6. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2} = \frac{1}{2}.$

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\pi.$

8. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x\,dx}{(1+x^2)^4} = \frac{1}{48}.$

9. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx = \frac{a}{a^2+b^2}.$

10. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sen} bx = \frac{a}{a^2+b^2}.$

11. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\pi.$

12. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab}\,\frac{1}{2}\pi.$

13 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x)} = \ln 2.$

14. $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \pi.$

15. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sec t - \operatorname{tg} t)\,dt = \ln 2.$

16. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\cos\left(\frac{1}{4}\pi + x\right)dx = 0$

17. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{a^2e^x + b^2e^{-x}} = \frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$

Dadas las siguientes integrales definidas, indicar su valor cuando convergen o, en caso contrario su divergencia:

18. $\int_0^1 \frac{dx}{x}$. R: Diverge.

19. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$. R: 2.

20. $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{6-x}}$. R: 4.

21. $\int_2^6 \frac{dx}{(6-x)^{\frac{3}{2}}}$. R: Diverge.

22. $\int_5^6 \frac{dx}{x-5}$. R: Diverge.

23. $\int_5^6 \frac{dx}{(x-5)^{\frac{2}{3}}}$. R: 3.

Verificar las siguientes integrales definidas:

24. $\int_{-1}^8 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{9}{2}$.

25. $\int_0^{33} \frac{dx}{(x-1)^{\frac{4}{5}}} = 15$.

26. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$.

27. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4+x^2} = \pi$.

28. $\int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x)^3} dx = \frac{1}{2}$.

29. $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\pi$.

(Hágase $x = t^2$).

30. $\int_0^2 \frac{2\,dx}{\sqrt{4-x^2}} = \pi$.

31. $\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{2-x}} = \frac{10}{3}$.

(Téngase en cuenta la discontinuidad de la función en $x = 2$)

32. $\int_2^4 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-4}} = 4\sqrt{3} + 2\ln(2+\sqrt{3}) \sim 9{,}56$.

33. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$ si $a > b$.

34. $\int_0^1 \ln x\,dx = -1$.

35. Verificar que es

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi.$$

(Aplíquese la definición II en los 2 extremos. Utilícese la sustitución $x = \operatorname{sen}^2 t$).

36. Calcular el valor principal de $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$.

R: 0.

37. Verificar que es $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + 2\cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

(Aplíquese la definición II).

38. Verificar que es convergente $I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Solución: La función $\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ es, en el intervalo $(1, t)$, menor que $\frac{1}{x^2}$ y de acuerdo al concepto de integrales definidas la desigualdad se conserva al hacer las integraciones. Por consiguiente, pasando al límite resulta

$$I \leqslant \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1.$$

39. Verificar que es convergente

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}\, dx.$$

40. Determinar el área limitada por la curva

$$y^4 (1 - x) = 1,$$

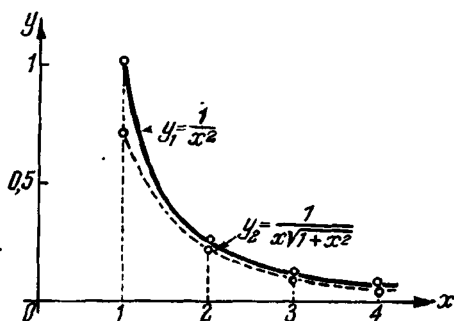


FIG. XI-46

los ejes coordenados y la asíntota vertical $x = 1$.

R: $\frac{4}{3}$.

41. Calcular el área del bucle del folio de Descartes dado en forma paramétrica por las expresiones

$$x = \frac{3\,at}{1+t^3}, \qquad y = \frac{3\,at^2}{1+t^3}.$$

(Nótese que los extremos del intervalo de integración correspondientes al bucle son $t = 0$ y $t = \infty$).

R $\frac{3}{2}a^2$

42. Calcular $I = \int_0^{\pi} \ln(\operatorname{sen} x)\, dx.$

Solución La observación de la figura muestra que por razones de simetría es

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{sen} x)\, dx. \qquad [1]$$

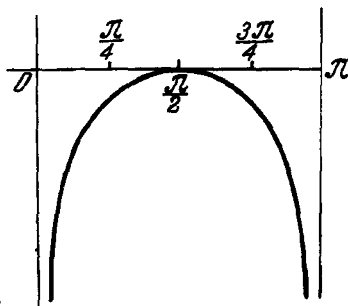


Fig. XI-47.

Como es $\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x \cdot \cos \frac{1}{2}x$, resulta

$$\ln(\operatorname{sen} x) = \ln 2 + \ln\left(\operatorname{sen} \frac{1}{2}x\right) + \ln\left(\cos \frac{1}{2}x\right)$$

y también se tiene integrando esta relación entre 0 y π:

$$I = \int_0^{\pi} \ln(\operatorname{sen} x)\, dx = \pi \ln 2 + \int_0^{\pi} \ln\left(\operatorname{sen} \frac{1}{2}x\right) dx + \int_0^{\pi} \ln\left(\cos \frac{1}{2}x\right) dx$$

Cambiando en estas últimas integrales $\frac{1}{2}x$ por x resulta

$$I = \pi \ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{sen} x)\, dx + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\, dx.$$

Siendo iguales las 2 integrales, se tiene:

$$I = \pi \ln 2 + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{sen} x)\, dx \qquad [2]$$

Comparando [1] con [2] resulta

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{sen} x)\, dx = \pi \ln 2 + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{sen} x)\, dx$$

o sea

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{sen} x)\, dx = -\frac{1}{2}\pi \ln 2, \qquad I = \int_0^{\pi} \ln(\operatorname{sen} x)\, dx = -\pi \ln 2$$

13. CALCULO DE ALGUNAS INTEGRALES DEFINIDAS

Con vistas a deducir en el parágrafo siguiente una notable fórmula de Wallis que permite expresar π como límite de un producto, calcularemos las integrales definidas

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m x\, dx. \qquad [1]$$

Para hallar la integral indefinida correspondiente escribimos la cantidad subintegral en la forma:

$$\operatorname{sen}^m x\, dx = \operatorname{sen}^{m-1} x \cdot \operatorname{sen} x\; dx = -\operatorname{sen}^{m-1} x\, d(\cos x)$$

e integrando por partes resulta:

$$I_m = -\left[\operatorname{sen}^{m-1} x \cdot \cos x\right]_0^{\pi/2} + (m-1)\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{m-2} x \cdot \cos^2 x\, dx.$$

Reemplazando $\cos^2 x$ por $1 - \operatorname{sen}^2 x$ y teniendo en cuenta que la expresión entre corchetes se anula, resulta:

$$I_m = (m-1) I_{m-2} - (m-1) I_m$$

o sea

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}.$$

De acuerdo a esta ley de recurrencia todas estas integrales se llevarán a una de las 2 siguientes

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\; dx = 1, \qquad \int_0^{\pi/2} dx = \frac{1}{2}\pi,$$

según que sea *m impar* o *m par*.

En el primer caso, si el exponente es impar, escribiendo $m = 2p + 1$, resulta:

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \frac{2p}{2p+1} \cdot \frac{2p-2}{2p-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1 =$$

$$= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2p}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p-1)}\; \frac{1}{2p+1}.$$

En el segundo caso con $m = 2p$ resulta:

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p} \cdot \frac{2p-3}{2p-2} \cdot \frac{2p-5}{2p-4} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\pi =$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2p} \cdot \frac{1}{2}\pi.$$

Si en [1] reemplazamos x por $\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$ obtenemos la fórmula correspondiente para $\cos x$.

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m x\, dx = \begin{cases} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2p}\; \dfrac{1}{2}\pi & \text{si es } m = 2p. \\[2ex] \dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2p}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p-1)} \cdot \dfrac{1}{2p+1} & \text{si es } m = 2p+1. \end{cases}$$

Esta fórmula permite calcular las integrales

$$I_1 = \int_0^1 (1 - x^2)^m dx \qquad \text{e} \qquad I_2 = \int_0^\infty \frac{dx}{(1 + x^2)^m}$$

que luego utilizaremos.

Haciendo en la primera $x = \operatorname{sen} t$ resulta

$$I_1 = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m - 1)} \frac{1}{2m + 1}. \qquad [2]$$

Haciendo $x = \operatorname{tg} t$ en la segunda es

$$I_2 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p - 3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2p - 2)} \frac{1}{2}\pi. \qquad [3]$$

Fórmula de Wallis: Consideremos la función $y = \operatorname{sen} x$ en el intervalo abierto $\left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$ en donde toma todos los valores comprendidos entre 0 y 1. Como se trata de una función positiva y creciente en este intervalo, se verificará que

$$\operatorname{sen}^{2p-1} x > \operatorname{sen}^{2p} x > \operatorname{sen}^{2p+1}$$

e integrando entre 0 y $\frac{1}{2}\pi$, de acuerdo a la notación anterior será

$$I_{2p-1} > I_{2p} > I_{2p+1}.$$

Reemplazando los valores de estas integrales halladas anteriormente se tiene:

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2p - 2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p - 3)} \cdot \frac{1}{2p - 1} >$$

$$> \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2p} \frac{1}{2}\pi >$$

$$> \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2p}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p - 1)} \frac{1}{2p + 1}.$$

Dejando en el término central solo $\frac{1}{2}\pi$ resulta:

$$\frac{[2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2p - 2)2p]^2}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p - 1)]^2 2p} > \frac{1}{2}\pi >$$

$$\frac{[2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2p]^2}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p - 1)]^2} \cdot \frac{1}{2p + 1}$$

y en consecuencia debe ser

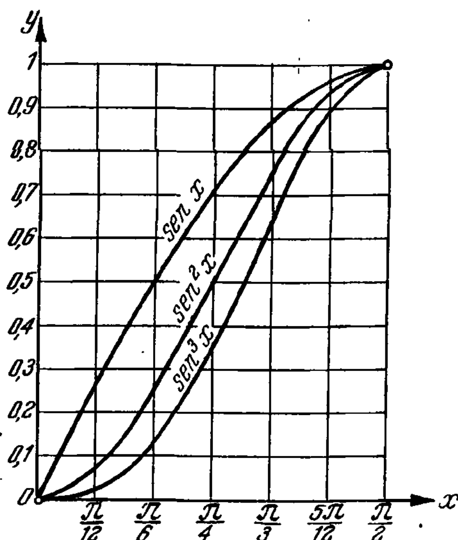


Fig. XI-48.

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{[2\cdot 4\cdot 6\ldots 2p]^2}{[1\cdot 3\cdot 5\ldots(2p-1)]^2}\,\frac{1}{2p+\vartheta}$$

siendo ϑ un número comprendido entre 0 y 1.

Si se hace tender p a infinito y se sustituye $2p+\vartheta$ por $2p$ (dado que su cociente tiende a 1: infinitésimos equivalentes cuando $p\to\infty$) se llega a la fórmula de Wallis (I):

$$\frac{1}{2}\pi = \lim_{p\to\infty}\frac{[2\cdot 4\cdot 6\ldots 2p]^2}{[1\cdot 3\cdot 5\ldots(2p-1)]^2}\cdot\frac{1}{2p}.$$

Observando que es $2\cdot 4\cdot 6\ldots 2p = 2^p(1\cdot 2\cdot 3\ldots p) = 2^p\cdot p!$ y que es

$$1\cdot 3\cdot 5\ldots(2p-1) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\ldots(2p-1)2p}{2\cdot 4\ldots 2p} = \frac{(2p)!}{2^p\cdot p!},$$

también la fórmula de Wallis se puede escribir en la forma (II):

$$\frac{1}{2}\pi = \lim_{p\to\infty}\frac{2^{4p}(p!)^4}{[(2p)!]^2 2p}.$$

INTEGRAL DE POISSON: Es de fundamental importancia la integral de Poisson

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx. \qquad [1]$$

Si bien no existe ninguna función elemental cuya derivada sea e^{-x^2}, podremos evaluar esta integral mediante algunas acotaciones apropiadas y la utilización de ciertas integrales definidas ya calculadas.

Estudiando las variaciones de las funciones

$$y_1 = (1+x^2)e^{-x^2} \qquad \text{e} \qquad y_2 = (1-x^2)e^{x^2}$$

se ve fácilmente (ej. 10 y 11, pág. 270) que ambas son < 1, excepto en el punto $x = 0$ donde alcanzan el valor 1. Por consiguiente se verifican las desigualdades:

$$(1+x^2)e^{-x^2} < 1; \qquad (1-x^2)e^{x^2} < 1$$

que se pueden escribir

$$e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}; \qquad 1-x^2 < \frac{1}{e^{x^2}} = e^{-x^2}$$

y reuniéndolas en una sola desigualdad:

$$1-x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}.$$

Elevando a la m - sima potencia resulta

$$(1 - x^2)^m < e^{-mx^2} < \frac{1}{(1 + x^2)^m}. \qquad [2]$$

Haciendo en [1] el cambio $x = z\sqrt{m}$ y teniendo en cuenta [2] es

$$I = \sqrt{m}\int_0^\infty e^{-mz^2}\,dz < \sqrt{m}\int_0^\infty \frac{dz}{(1 + z^2)^m}.$$

$$I > \sqrt{m}\int_0^\infty (1 - z^2)^m\,dz.$$

Reemplazando por los valores correspondientes se tiene:

$$\sqrt{m}\,\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2m}{1\cdot 3\cdot 5\ldots (2m-1)}\,\frac{1}{2m+1} < I <$$

$$< \sqrt{m}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots (2m-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots (2m-2)}\,\frac{1}{2}\pi$$

que podemos escribir

$$\frac{m}{2m+1}\left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2m}{1\cdot 3\cdot 5\ldots (2m-1)}\,\frac{1}{\sqrt{m}}\right] < \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx <$$

$$< \frac{1}{2}\pi\,\frac{2m}{2m-1}\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots (2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2m}\sqrt{m}\right].$$

En virtud de la fórmula de Wallis, los 2 corchetes tienden respectivamente a $\sqrt{\pi}$ y $1 : \sqrt{\pi}$ y por ello los 2 extremos tienden a $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Entonces debe ser

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Fórmula de Stirling (1): Esta fórmula que permite calcular valores aproximados de $n! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots n$ es de fundamental importancia en el cálculo de probabilidades.

Puesto que es

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots n, \qquad [1]$$

tomando logaritmos neperianos resulta

$$\ln (n!) = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln n. \qquad [2]$$

Gráficamente esta expresión representa la suma de los rectángulos de base unidad y altura

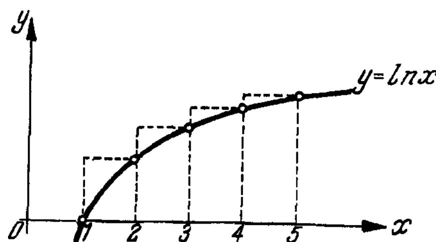


Fig. XI-49.

(1) Para la lectura de este parágrafo es necesario recordar algunos resultados obtenidos en las páginas 253 y 258.

$\ln 2$, $\ln 3$, ..., $\ln n$. Estas alturas corresponden a las ordenadas de la curva logarítmica $y = \ln x$ para $x = 2, 3, \ldots, n$.

Un primer valor aproximado de la suma [2] se tendrá calculando el área encerrada por la curva logarítmica entre 1 y n:

$$\int_1^n \ln x\, dx = \Big[x(\ln x - 1)\Big]_1^n = n(\ln n - 1) + 1. \qquad [3]$$

Así para $n = 10$, mientras el valor exacto de [2] es 15,104 y el valor aproximado de [3] es 14,026; para $n = 20$, los valores correspondientes son 42,335 y 40,915.

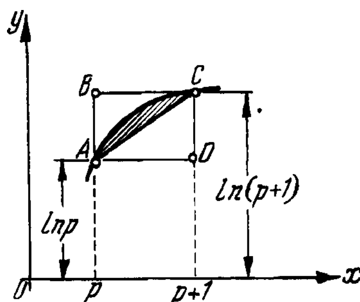


FIG. XI-50

Al área dada por [3] debemos agregar la suma de las áreas de los triángulos curvilíneos ABC de la figura 50. El área de cada uno de estos triángulos curvilíneos es igual a la diferencia entre el área del triángulo rectilíneo ABC y la zona (rayada en la figura) comprendida entre el arco y la cuerda AC.

El área del triángulo rectilíneo ABC es igual a

$$\frac{1}{2}\Big[\ln(p+1) - \ln p\Big]$$

y la suma de todos los triángulos análogos es

$$\frac{1}{2}\Big[(\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \ldots + \ln n - \ln(n-1)\Big] = \frac{1}{2}\ln n. \qquad [4]$$

El área de la zona rayada es

$$\int_p^{p+1} \ln x\, dx - \text{Area trapecio } [p, A, C, (p+1)] =$$

$$= \Big[x(\ln x - 1)\Big]_p^{p+1} - \frac{1}{2}[\ln(p+1) + \ln p] = \Big[p + \frac{1}{2}\Big]\ln\frac{p+1}{p} - 1. \qquad [5]$$

Desarrollaremos en serie esta expresión del logaritmo, teniendo en cuenta que es

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \qquad \text{para } |x| < 1$$

y análogamente

$$\ln(1 - x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots\right).$$

La diferencia de estas 2 expresiones es

$$\ln(1 + x) - \ln(1 - x) = \ln\frac{1 + x}{1 - x} = 2x\left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \dots\right).$$

Haciendo en esta expresión

$$x = \frac{1}{2p + 1} \quad \text{es} \quad \frac{1 + x}{1 - x} = \frac{p + 1}{p}$$

y por consiguiente será

$$\ln\frac{p + 1}{p} = \frac{2}{2p + 1}\left[1 + \frac{1}{3(2p + 1)^2} + \frac{1}{5(2p + 1)^4} + \dots\right],$$

relación que escribiremos, para comparar con el área de la zona rayada [5],

$$\left(p + \frac{1}{2}\right)\ln\frac{p + 1}{p} - 1 = \frac{1}{3(2p + 1)^2} + \frac{1}{5(2p + 1)^4} + \dots \qquad [6]$$

Acotaremos la serie S_p que aparece en el segundo miembro:

$$S_p = \frac{1}{3(2p + 1)^2} + \frac{1}{5(2p + 1)^4} + \dots <$$

$$< \frac{1}{3(2p + 1)^2}\left[1 + \frac{1}{(2p + 1)^2} + \frac{1}{(2p + 1)^4} + \dots\right].$$

El corchete es una serie geométrica de razón $\frac{1}{(2p + 1)^2}$ y por consiguiente su suma será $(2p + 1)^2 : [(2p + 1)^2 - 1]$.

Resulta entonces

$$S_p < \frac{1}{3(4p^2 + 4p)} = \frac{1}{12p(p + 1)}.$$

La suma S de todas las zonas rayadas: $S = S_1 + S_2 + \dots + S_p + \dots + S_{n-1}$ será

$$S = \sum_{p=1}^{n-1} S_p < \frac{1}{12}\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p(p + 1)} = \frac{1}{12}\sum_{p=1}^{n-1}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + 1}\right) = \frac{1}{12}\left(1 - \frac{1}{n}\right). \qquad [7]$$

Podemos asegurar entonces que el número S es finito.

Teniendo en cuenta los resultados [3], [4], [6] y [7] resulta:

$$\ln n! = [n(\ln n - 1) + 1] + \frac{1}{2}\ln n - S. \qquad [8]$$

Esta igualdad se puede escribir considerando ya en lugar de los logaritmos los números correspondientes:

$$n! = e \cdot e^{-S} n^n n^{1/2} e^{-n} = K n^n e^{-n} n^{1/2} \qquad [9]$$

siendo $K = e^{1-S}$.

Determinación de K: Utilizando la fórmula de Wallis determinaremos el valor de K, reemplazando en (pág. 402)

$$\frac{1}{2}\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{[(2n)!]^2 2n}$$

$n!$ por la fórmula [9] (advirtiendo que las dos expresiones de K correspondientes a $n!$ y $(2n)!$ tienden al mismo límite K cuando $n \to \infty$):

$$\frac{1}{2}\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n} K^4 n^{4n} e^{-4n} n^2}{K^2 (2n)^{4n} e^{-4n} 2n \cdot 2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{K^2}{4} = \frac{1}{4}K^2.$$

Por consiguiente resulta $K = \sqrt{2\pi}$.

Reemplazando en [9] se obtiene la fórmula de Stirling:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}.$$

Para $n = 10$ se obtiene 3 598 696 con un error porcentual del 8 % y para $n = 20 : 20! \sim 2\,422\,786\,385\,510\,400\,000$ con un error porcentual del 4 %.

La función gamma:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx. \quad (n\text{: número entero y positivo o nulo}).$$

De acuerdo a la definición de integral en un intervalo infinito será el límite de la integral calculada en el intervalo $(0, t)$, cuando $t \to \infty$.

Aplicando la fórmula de integración por partes resulta

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = -\int_0^\infty x^n d(e^{-x}) =$$
$$= \Big[-x^n e^{-x} \Big]_0^\infty + n\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx.$$

El término $\Big[-x^n e^{-x} \Big]_0^\infty$ es nulo pues para $x \to \infty$, $x^n e^{-x} \to 0$ (como se

puede verificar aplicando reiteradamente la regla de L'Hospital) y para $x = 0$ también se anula el producto. La integral que aparece es del mismo tipo que la que define la función Γ, pero el exponente de x está disminuido en una unidad. Resulta así la fórmula

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n).$$

A la expresión $\Gamma(n)$ podemos aplicarle la fórmula correspondiente disminuyendo el índice en una unidad y reiterando el procedimiento hasta $n = 1$, se obtiene

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \ldots = \\ = n(n-1)(n-2)\ldots 1\Gamma(1).$$

El cálculo de $\Gamma(1)$ es inmediato pues por definición es

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty x^0 e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1.$$

Por consiguiente resulta $\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2)\ldots 1$ es decir, $\Gamma(n+1) = n!$

Nota: Si en lugar de un valor n entero, positivo o nulo, consideramos un valor α real podemos generalizar la definición de la función gamma:

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx. \qquad [1]$$

¿Para qué valores de α está definida esta integral impropia?

Si es $\alpha > 0$ la integral es impropia porque el límite superior de integración es infinito, pero si es $\alpha < 0$, también el origen es un punto de discontinuidad de la función.

Demostraremos que si es $\alpha > -1$, la integral [1] es convergente.

Para ello dividamos el intervalo de integración en 3 partes· (0,1), $(1, r)$ y (r, ∞).

En (0, 1) puesto que es $\alpha > -1$, podremos escribir $\alpha = -1 + \varepsilon$, siendo ε un valor positivo. Como en ese intervalo es $|e^{-x}| < 1$, resulta $|x^\alpha e^{-x}| < |x|^\alpha$ y siendo

$$\left|\int_0^1 x^\alpha e^{-x} dx\right| \leqslant \int_0^1 |x^\alpha e^{-x}| dx < \int_0^1 |x|^\alpha dx = \int_0^1 x^{-1+\varepsilon} dx = \left[\frac{x^\varepsilon}{\varepsilon}\right]_0^1 = \frac{1}{\varepsilon}$$

resulta un valor finito. En el otro extremo es posible determinar un valor r tal que si es $x > r$, resulta $x^\alpha e^{-x} < x^{-2}$ o, lo que es lo mismo, $e^x > x^{\alpha+2}$. Se tiene entonces $\int_r^\infty x^\alpha e^{-x} dx \leqslant 1$, pues $\int_1^\infty x^{-2} dx = 1$.

En el intervalo restante $(1, r)$ la función es continua y su integral acotada. Luego, la función gamma resulta definida para $\alpha > -1$ por la fórmula [1].

Repitiendo el razonamiento utilizado en el cálculo de recurrencia para la determinación de $\Gamma(n+1)$ resulta para cualquier $\alpha > -1$:

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \qquad ó \qquad \Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}.$$

Esta fórmula, *adoptada como definición*, permite dar valores a la función gamma para cualquier α, positivo o negativo.

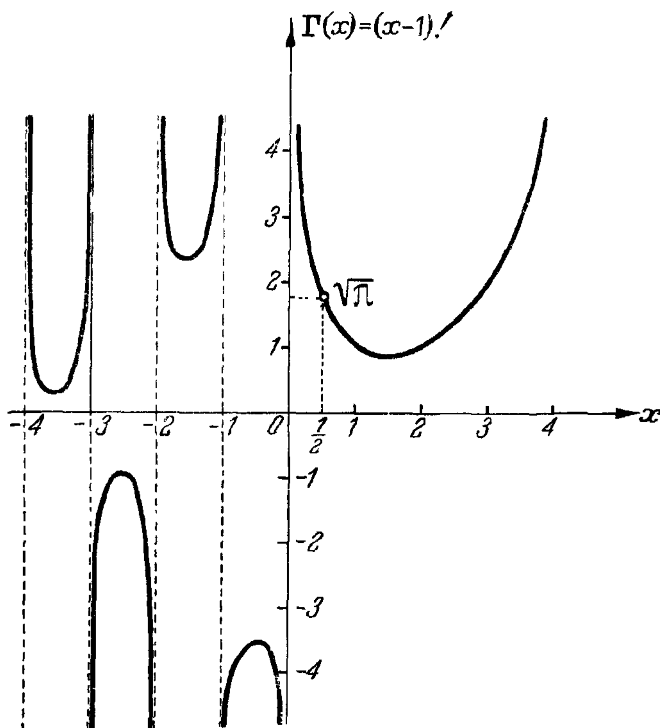


FIG. XI-51.

Queda así generalizado para cualquier valor α real, positivo o negativo el factorial de α de acuerdo a la relación (demostrada sólo para $\alpha = n$, entero $\geqslant 0$).

$$\alpha! = \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha). \qquad [1]$$

En particular si es $\alpha = 0$, resulta $0! = \Gamma(1) = 0\Gamma(0)$ y como es $0! = 1$, debe adoptarse como valor de $\Gamma(0)$ el valor ∞. Lo mismo sucede con todos los valores enteros y negativos de α. Así si $\alpha = -1$ es $(-1)! = \Gamma(0) = (-1)\Gamma(-1)$ y puesto que hemos tomado $\Gamma(0) = \infty$, debemos adoptar también $\Gamma(-1) = \infty$.

En virtud de la relación [1] es suficiente conocer los valores de $\Gamma(x)$ para x comprendido entre 1 y 2 y todos los demás valores se obtienen por recurrencia (tabla XV del apéndice).

CÁLCULO DE $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$: Haciendo en la definición $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}\,dx$ la sustitución $x = z^2$ resulta $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz$ y como esta integral de Poisson ya ha sido calculada y su valor es $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, se tiene

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)= \sqrt{\pi} \sim 1{,}77.$$

Siendo $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ resulta $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$,

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi},$$

LA FUNCIÓN BETA: $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$. ($p, q$ positivos).

Si los valores de p y de q están comprendidos entre 0 y 1, la integral es impropia. Así para $p = q = \frac{1}{2}$ la función subintegral tiene la forma representada en la figura y la función beta $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ tiene como valor el área rayada

De acuerdo a las definiciones será

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)=\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon'\to 0}}\left[\int_\varepsilon^{1-\varepsilon'}\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}}\right] =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon'\to 0}}\Big[-\operatorname{arc\,sen}(1-2x)\Big]_\varepsilon^{1-\varepsilon'} =$$

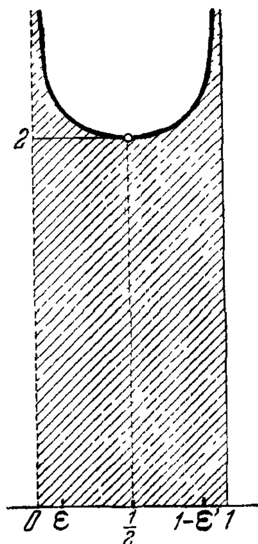


FIG. XI-52.

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon'\to 0}}\Big[\operatorname{arc\,sen}(1-2\varepsilon) - \operatorname{arc\,sen}(-1+2\varepsilon')\Big] = 2\operatorname{arc\,sen} 1 = \pi.$$

Limitémonos a considerar el caso de la función beta cuyos parámetros son números enteros y positivos: $p = m$; $q = n$:

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx.$$

La fórmula de integración por partes aplicada a esta función permite escribir

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx = \left[\frac{(1-x)^{n-1}x^m}{m}\right]_0^1$$

$$+\frac{n-1}{m}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-2}dx = \frac{n-1}{m}B(m+1, n-1).$$

Reiterando la aplicación de esta fórmula $(n-1)$ veces se tendrá:

$$B(m, n) = \frac{n-1}{m}B(m+1, n-1) = \frac{n-1}{m}\cdot\frac{n-2}{m+1}B(m+2, n-2) =$$

$$= \frac{n-1}{m}\cdot\frac{n-2}{m+1}\cdot\frac{n-3}{m+2}B(m+3, n-3) = \ldots =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 1}{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-2)}B(m+n-1, 1).$$

Pero es

$$B(m+n-1, 1) = \int_0^1 x^{m+n-2}dx = \left[\frac{x^{m+n-1}}{m+n-1}\right]_0^1 = \frac{1}{m+n-1}$$

Luego resulta

$$B(m, n) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 1}{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-2)}\cdot\frac{1}{m+n-1} =$$

$$= \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$$

y con la notación de la función gamma se tiene

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

Si bien esta fórmula la hemos demostrado para el caso de valores enteros de m y n, se puede demostrar que conserva su validez para cualquier par de valores p y q *positivos:*

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Admitida esta fórmula resulta para $p = q = \frac{1}{2}$

$$B(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \pi = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = [\Gamma(\tfrac{1}{2})]^2$$

con lo que volvemos a encontrar la célebre fórmula $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Capítulo XII

APLICACIONES GEOMETRICAS

1. RECTIFICACION DE CURVAS

Consideremos una función continua $y = f(x)$ definida en un intervalo (a, b) y sea la curva AB su representación gráfica en un diagrama cartesiano.

¿Qué debe entenderse por la longitud del arco AB?

En los estudios elementales se consideran las longitudes de las líneas poligonales como suma de longitudes de segmentos de rectas y el caso especial de la circunferencia que se define como límite común de los perímetros de los polígonos regulares inscriptos y circunscriptos.

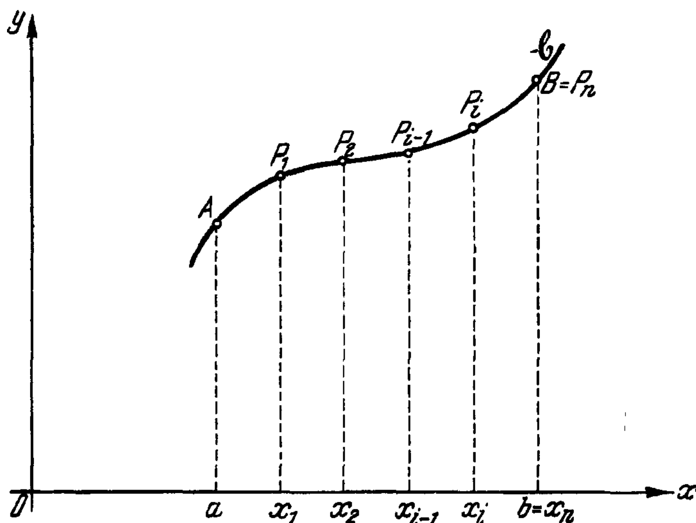


Fig. XII-1.

Procediendo en forma análoga a la que nos condujo a la definición de *área*, efectuaremos los siguientes pasos:

1°) Dividimos el intervalo (a, b) en n partes iguales o desiguales y señalamos sobre la curva los puntos $P_0 = A$, P_1, P_2, ..., P_i, ..., $P_n = B$, correspondientes a las abscisas $x_0 = a$, x_1, x_2, ..., x_i, ..., $x_n = b$, respectivamente.

Los puntos P_i determinan una *poligonal* $P_0P_1P_2 \ldots P_n$, cuya longitud se puede calcular por tratarse de una suma finita de segmentos rectilíneos $\overline{P_{i-1}P_i}$:

$$\text{long. poligonal} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i}.$$

2°) Calculamos el límite de esta suma cuando el número de sumandos tiende a infinito (y cada uno de ellos tiende a cero) y si este límite *existe* y es finito, es por *definición*, la *longitud s del arco AB*:

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i}.$$

Demostraremos ahora que existirá este límite si la función $f(x)$ además de ser continua tiene derivada continua en (a, b). En tal caso se dice que la curva es *rectificable*.

En efecto: de la figura resulta, en base al teorema de Pitágoras:

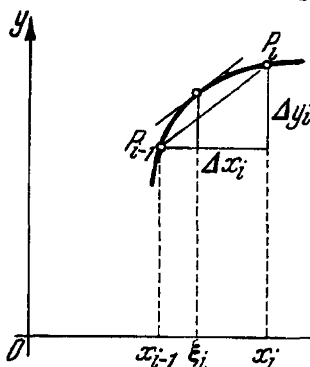


FIG. XII-2.

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}.$$

Puesto que en virtud del teorema del valor medio del cálculo diferencial (pág. 236) es

$$\Delta y_i = f'(\xi_i)\Delta x_i$$

se tiene

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{\Delta x_i^2 + f'(\xi_i)^2 \Delta x_i^2} =$$

$$= \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}\Delta x_i$$

y de acuerdo a la definición, la longitud de un arco de curva se expresa mediante un límite que es una integral definida:

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Si la función $f'(x)$ es continua, esta integral existe y con ello está asegurada la existencia de la longitud del arco.

EJEMPLOS:

1°) Calcular la longitud del segmento de recta $y = x$ en el intervalo $x = 0$; $x = 1$.
Por ser $f'(x) = 1$ se tiene el resultado evidente

$$s = \int_0^1 \sqrt{2}\, dx = \sqrt{2}.$$

2º) Calcular la longitud de la parábola semicúbica $y = x^{\frac{3}{2}}$ en el intervalo $(0, 1)$.

Por ser $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ resulta

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \frac{8}{27}\left[\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \sim 1{,}437.$$

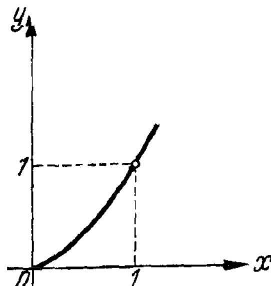


Fig. XII-3.

3º) Calcular la longitud de la catenaria

$$y = \frac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{2}}\right) \text{ en el intervalo } (0, a).$$

Teniendo en cuenta que la función dada puede escribirse $y = a \operatorname{Ch}\frac{x}{a}$ resulta, por ser $f'(x) = \operatorname{Sh}\frac{x}{a}$:

$$s = \int_0^a \sqrt{1 + \operatorname{Sh}^2\frac{x}{a}}\, dx = \int_0^a \operatorname{Ch}\frac{x}{a}\, dx = a\left[\operatorname{Sh}\frac{x}{a}\right]_0^a = a(\operatorname{Sh} 1 - \operatorname{Sh} 0) = 1{,}175\, a$$

Nota: En la gran mayoría de los casos no se puede encontrar una expresión "cerrada", esto es, una combinación de un número finito de funciones elementales que expresen la longitud $s(x)$ de un arco. Pero sea creando nuevas funciones como veremos al estudiar las integrales elípticas, sea aplicando métodos aproximados, se puede evaluar el arco entre límites determinados.

Ejercicios:

1. Calcular la longitud del arco de parábola

$$y = 2x^2 + 5x$$

que está por debajo del eje x.

R. 6,95.

2 Calcular la longitud del arco de la parábola

$$ay = x^2$$

desde el origen hasta el punto $x = a$.

R. 2,957

3. Calcular la longitud del arco de la curva

$$y = \ln(1 - x^2)$$

desde $x = 0$ hasta $x = a$, con $|a| < 1$.
Efectuar la representación gráfica en el intervalo $(-1, +1)$.

R $\ln(1 + a) - \ln(1 - a) - a$.

4. Calcular la longitud total de la hipocicloide de 4 puntas (astroide):

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

(Obsérvese que $y' = -y^{\frac{1}{3}} : x^{\frac{1}{3}}$ como resulta derivando la función implícita. Entonces es

$$1+y'^2=1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}},$$

teniendo en cuenta la ecuación de la curva. Extrayendo la raíz cuadrada de esta expresión, integrando entre 0 y a y multiplicando por 4 resulta la longitud total de la astroide: $6a$).

5. Calcular la longitud del arco comprendido en un cuadrante de la curva

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

R: $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$.

6. Calcular la longitud del arco de la curva

$$y=\ln\sec x$$

desde el origen hasta el punto de abscisa $x=\dfrac{\pi}{3}$.

R: $\ln 3{,}732=1{,}317$.

7. Calcular la longitud del arco de curva

$$4y=x^2-2\ln x$$

desde $x=1$ hasta $x=2$.

R: 1,09.

8. Calcular la longitud de la curva

$$9y^2=(x^2+2)^3$$

desde el origen hasta el punto de abscisa $x=2$.

R: $\dfrac{14}{3}$.

9. Calcular la longitud de la parábola semicúbica

$$4y^2=x^3$$

en el intervalo (0, 1).

R: $\dfrac{61}{54}$.

CURVA NO RECTIFICABLE: Hemos definido la longitud de un arco de curva mediante el límite de la longitud de una poligonal inscripta. Veamos un ejemplo de curva en el cual este límite no existe. Sea $y=x\,\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{x}$ una función definida en el intervalo $(-1,+1)$ que alcanza sus máximos y mínimos en $x_k=\pm\dfrac{2}{2k+1}$ con $k=0, 1, 2, 3, \ldots$, pues allí sen x vale $+1$ ó -1 alternadamente y la función es $y_k=\pm x_k$.

Evidentemente la longitud de la poligonal inscripta es mayor que el doble de la suma de los segmentos verticales trazados desde los puntos x_k hasta la intersección con la curva. Pero la suma de los valores absolutos de los segmentos: $\sum_{k=0}^{n}\dfrac{2}{2k+1}$ tiende a infinito cuando $n\to\infty$, como se verá en la teoría de las series numéricas (pág. 523, ej. 3).

Más aun, esta curva no es rectificable en ningún intervalo $(-\delta, +\delta)$ que contenga el origen, por pequeño que sea δ.

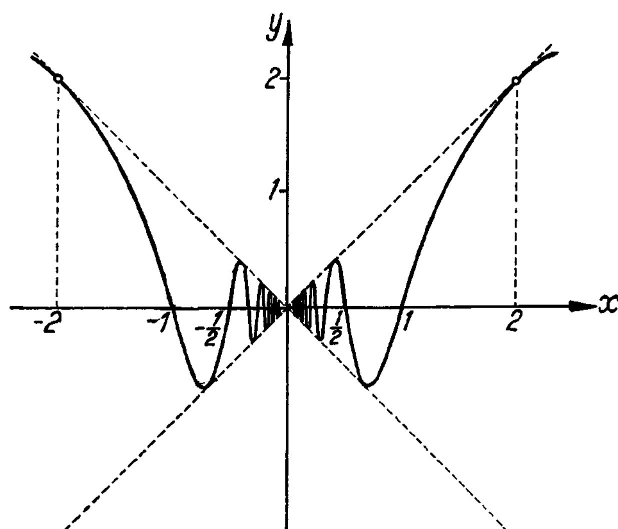


Fig. XII-4.

Este ejemplo muestra que el concepto de *curva* es mucho más complejo que el que se le da corrientemente como imagen gráfica de una función continua.

En el libro de J. Pierpont. *Theory of functions of Real Variables*, vol. II, Ed. Ginn, el lector que lo desee encontrará un análisis crítico de esta importante noción.

2. DIFERENCIAL DE ARCO. VECTOR $\vec{ds}$.

Si consideramos variable con x el extremo B del arco AB, su longitud se expresará mediante la integral

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Diferenciando esta expresión se tendrá

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Si introducimos el dx dentro del signo radical y puesto que es $f'(x)\, dx = dy$, resulta

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Al vector $\vec{ds}$ que tiene su origen en $P(x, y)$, situado sobre la

tangente a la curva, orientado en el sentido de los arcos crecientes y cuyo módulo es ds, se le llama "vector diferencial de arco"

Llamando α al ángulo que forma la tangente con el eje de las abscisas resultan los *cosenos directores* de la tangente:

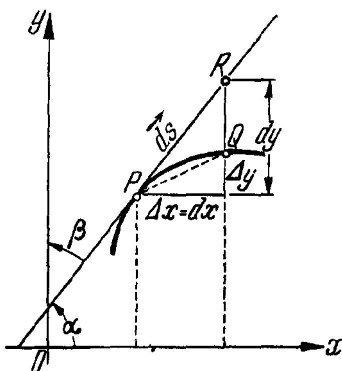


Fig. XII-5.

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}\ ; \quad \operatorname{sen}\alpha = \cos\beta = \frac{dy}{ds}.$$

Nota: Obsérvese la diferencia entre los siguientes tres infinitésimos, que con las notaciones de la figura escribimos:

cuerda $\overline{PQ} = \Delta c$; arco $\widehat{PQ} = \Delta s$;

segmento de tangente $\overline{PR} = ds$.

Estos tres infinitésimos diferentes, son sin embargo *equivalentes*, pues puede **demostrarse** que el límite del cociente de 2 cualesquiera de ellos es igual a 1.

3. LONGITUD DE UN ARCO EN COORDENADAS PARAMETRICAS

Cuando la curva está dada en coordenadas paramétricas

$$x = g(t), \qquad y = h(t),$$

resulta $dx = g'(t)\,dt$; $dy = h'(t)\,dt$ y por consiguiente el diferencial de arco ds es:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{g'(t)^2 + h'(t)^2}\,dt.$$

La longitud de un arco de curva AB dada en forma paramétrica cuando los extremos A y B están dados por los valores t_0 y t_1 del parámetro será:

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g'(t)^2 + h'(t)^2}\,dt.$$

Ejemplo:

Calcular la longitud de una onda de cicloide

$$\begin{cases} x = r(t - \operatorname{sen} t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$$

cuando t varía de 0 a 2π.

Siendo $dx = r(1 - \cos t)\, dt$; $dy = r \operatorname{sen} t\, dt$, resulta

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1-\cos t)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 t}\; dt = r \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}\; dt$$

$$s = r \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\; dt.$$

Pero como es $1 - \cos t = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t$ resulta:

$$s = 2r \int_0^{2\pi} \sqrt{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t}\; dt = 4r \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \frac{1}{2} t\; d\left(\frac{1}{2} t\right) = 4r \left[-\cos \frac{1}{2} t \right]_0^{2\pi} = 8r.$$

EJERCICIOS:

1. Dada la curva

$$\begin{cases} x = 4 + 3t^2 \\ y = 6 - 4t^2 \end{cases}$$

calcular la longitud del arco comprendido entre $t = 0$ y $t = 4$
¿De qué curva se trata en coordenadas cartesianas? Verifíquese el resultado gráficamente.

R: 80.

2 Dada la curva

$$\begin{cases} x = 2 + 4 \operatorname{sen} 2t \\ y = 4 - 4 \cos 2t \end{cases}$$

calcular la longitud del arco comprendido entre $t = 0$ y $t = \frac{1}{2}\pi$.

R: 4π.

3. Hallar la longitud total de la astroide

$$\begin{cases} y = a \operatorname{sen}^3 t. \\ x = a \cos^3 t, \end{cases}$$

R: $6a$.

(Compárese con el resultado obtenido en el ej. 4 del § 1).

4. Calcular la longitud del arco de la curva

$$\begin{cases} x = e^t \operatorname{sen} t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$$

desde $t = 0$ hasta $t = \frac{1}{2}\pi$.

R: $\sqrt{2}\,(e^{\frac{1}{2}\pi} - 1)$.

5. Dada la evolvente del círculo de radio a:

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t) \\ y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t) \end{cases}$$

calcular la longitud del arco desde $t = 0$ hasta $t = t_1$.

R: $\frac{1}{2}at_1$.

6. Dada la curva

$$\begin{cases} x = n\cos t + \cos nt \\ y = n\,\text{sen}\, t - \text{sen}\, nt \end{cases}$$

calcular la longitud del arco comprendido entre $t = 0$ y $t = \frac{\pi}{n+1}$.

R: $\frac{4n}{n+1}$.

4. INTEGRALES ELIPTICAS

Si aplicamos la fórmula que permite calcular la longitud de un arco de curva, obtendremos la integral de una cierta función sólo excepcionalmente integrable en forma "cerrada", esto es, mediante la combinación de un número finito de funciones elementales. La mayoría de las veces habrá que recurrir a procedimientos aproximados: numéricos, gráficos o mecánicos.

Algunas veces se crean nuevas funciones definidas precisamente por esas integrales, y cuando su importancia lo justifica se estudian sus características analíticas y se calculan sus valores numéricos.

Es así como aparecen las *integrales elípticas* al intentar *rectificar* la elipse.

Sea una elipse de semiejes a y b, que en coordenadas cartesianas se escribe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y que en forma paramétrica queda definida mediante el par de ecuaciones

$$x = a\,\text{sen}\,\varphi;$$

$$y = b\cos\varphi$$

con el parámetro φ variando de 0 a 2π.

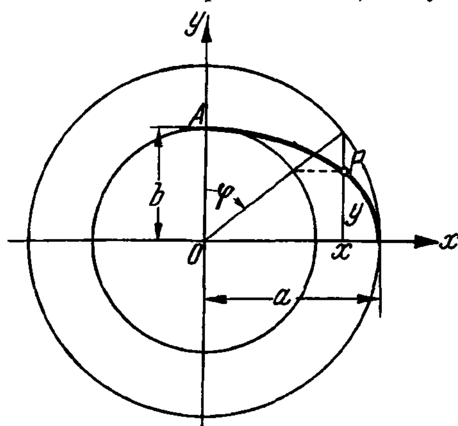


FIG. XII-6.

Como es

$$dx = a\cos\varphi\ d\varphi,$$

$$dy = -\,b\,\text{sen}\,\varphi\ d\varphi$$

resulta

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (a^2\cos^2\varphi + b^2\,\text{sen}^2\,\varphi)\,d\varphi^2 =$$

$$= [a^2(1 - \text{sen}^2\,\varphi) + b^2\,\text{sen}^2\,\varphi]\,d\varphi^2 = [a^2 - (a^2 - b^2)\,\text{sen}^2\,\varphi]d\varphi^2 =$$

$$= a^2(1 - k^2\,\text{sen}^2\,\varphi)\ d\varphi^2$$

designando con k^2 al cociente $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2}$ (k es la *excentricidad* de la elipse).

Siendo

$$ds = a\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}\; d\varphi,$$

el arco AP es

$$s = a \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}\; d\varphi.$$

No hay ninguna combinación de funciones elementales cuya derivada sea $\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}$ con $k^2 \neq 1$. Por eso se han introducido y tabulado las integrales elípticas de Legendre de primera y segunda especie (con $k^2 \neq 1$):

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}, \qquad \text{Integral de 1ª especie}$$

$$E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}\; d\varphi. \qquad \text{Integral de 2ª especie}$$

Resulta entonces para el arco de elipse, de semiejes a y b, contado a partir del punto A del semieje menor y con $k^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2}$:

$$\Big[\, s \,\Big]_0^{\varphi} = aE(k, \varphi).$$

En particular si $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, se tienen las integrales elípticas completas de primera y segunda especie

$$F\left(k, \frac{1}{2}\pi\right) = F_1(k), \qquad E\left(k, \frac{1}{2}\pi\right) = E_1(k).$$

Existen tablas de las integrales elípticas E y F y de sus inversas, las importantes *funciones elípticas* (¹).

Las tablas XIX, XX y XXI del apéndice dan los valores de $F(k, \varphi)$, $E(k, \varphi)$, $F_1(k)$, $E_1(k)$ con 3 y 4 decimales. Como el parámetro k es menor que la unidad se considera $k = \operatorname{sen} \alpha$ y se entra en la tabla una vez determinado α.

Al estudiar el desarrollo en serie de potencias (Cap. XV) veremos como se pueden obtener valores aproximados de las integrales elípticas.

(¹) En las célebres *Tables of Functions* de E. Jahnke y F. Emde (1938; reimpresas por Dover en 1943) hay una lista de integrales que se pueden calcular mediante las integrales elípticas E y F.

EJERCICIOS:

1. Hallar la longitud total de una elipse de semiejes $a = 5$, $b = 3$.
Solución. La longitud buscada será 4 veces la del arco comprendido entre 0 y $\frac{1}{2}\pi$

$$L = 4\left[\ s\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4a\,E_1(k), \quad \text{con} \quad k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{16}{25} \quad \text{o sea} \quad k = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

Luego, como la tabla XXI del apéndice tiene entrada por $\alpha = \operatorname{arc\,sen} k = \operatorname{arc\,sen} 0{,}8 = 53^\circ\,08'$ resulta $E_1(0{,}8) = 1{,}276$ y la longitud L es.

$$L = 4 \times 5 \times 1{,}276 = 25{,}53.$$

Si no se dispone de tablas se puede efectuar el cálculo por desarrollo en serie, como veremos en el capítulo XV (1).

2 Determinar la longitud de un arco de hipérbola dada en la forma

$$x = \frac{a}{\operatorname{sen}\varphi}, \qquad y = b\operatorname{cotg}\varphi,$$

comprendido entre el vértice $\left(\varphi = \frac{1}{2}\pi\right)$ y un punto cualquiera correspondiente al valor φ_1 del parámetro. Calcular el caso particular $a = b = 1$, $\varphi_1 = \frac{1}{4}\pi$.

$$L = \int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2}\;\frac{d\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi} =$$

$$= \operatorname{cotg}\varphi\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2} - \int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2\cos^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2}} =$$

$$= \operatorname{cotg}\varphi\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2} - \int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2}\,d\varphi +$$

$$+ b^2\int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2}}.$$

Designando con $k^2 = \dfrac{a^2}{a^2 + b^2}$ resulta $\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2} = \dfrac{a}{k}\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}$

Luego se tiene

$$L = \operatorname{cotg}\varphi\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2} - \frac{a}{k}\Big[E_1(k) - E(k,\varphi_1)\Big] + \frac{kb^2}{a}\Big[F_1(k) - F(k,\varphi_1)\Big].$$

---

(1) Resulta $L = 2\pi a\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \quad\right]$

Para el caso $a = b = 1$, $\varphi_1 = \frac{1}{4}\pi$ resulta:

$$L = \sqrt{1{,}5} - \sqrt{2}\left[E_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) - E\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\sqrt{2}\left[F_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi\right)\right]$$

y con los valores dados por las tablas XIX, XX y XXI del apéndice se tiene $L \sim 1{,}099$.

5. LONGITUD DE UN ARCO EN COORDENADAS POLARES

Sea AB un arco de curva dado en coordenadas polares mediante la relación

$$\varrho = \varrho(\vartheta).$$

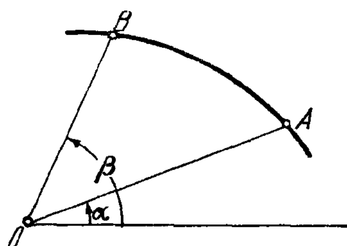


Fig. XII-7.

Teniendo en cuenta que es

$$x = \varrho \cos \vartheta,$$

$$y = \varrho \operatorname{sen} \vartheta,$$

resultan x e y funciones del parámetro ϑ.

Diferenciando es·

$$dx = \cos \vartheta \ d\varrho - \varrho \operatorname{sen} \vartheta \ d\vartheta,$$

$$dy = \operatorname{sen} \vartheta \ d\varrho + \varrho \cos \vartheta \ d\vartheta.$$

Elevando al cuadrado, sumando y simplificando se tiene:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = d\varrho^2(\cos^2\vartheta + \operatorname{sen}^2\vartheta) + \varrho^2 d\vartheta^2(\operatorname{sen}^2\vartheta + \cos^2\vartheta) -$$

$$- 2d\varrho \cos\vartheta \ \varrho \operatorname{sen}\vartheta d\vartheta + 2d\varrho \operatorname{sen}\vartheta \varrho \cos\vartheta d\vartheta = d\varrho^2 + \varrho^2 d\vartheta^2,$$

con lo que resulta

$$ds = \sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\vartheta^2} = \sqrt{\left(\frac{d\varrho}{d\vartheta}\right)^2 + \varrho^2} \, d\vartheta = \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2} \, d\vartheta,$$

designando con ϱ' la derivada de ϱ respecto de ϑ.

La longitud del arco AB será la integral correspondiente a este diferencial:

$$s = \int_\alpha^\beta ds = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2} \, d\vartheta.$$

EJEMPLOS:

1º) **Calcular la longitud de la curva $\varrho = \operatorname{sen}\vartheta$ para $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$.**

Por ser $\varrho' = \cos\vartheta$ es $ds = \sqrt{\operatorname{sen}^2\vartheta + \cos^2\vartheta}\, d\vartheta = d\vartheta$ y la longitud buscada será

$$s = \int_0^\pi d\vartheta = \pi,$$

resultado evidente pues se trata de una circunferencia de radio $\frac{1}{2}$.

2º) **Calcular la longitud total del arco de espiral**

$$\varrho = a\, e^{m\vartheta} \quad (m > 0),$$

comprendido entre el origen y un punto cualquiera (ϑ, ϱ).

Esta espiral tiene al origen como punto asintótico: el límite de ϱ cuando $\vartheta \to -\infty$ es 0. Habrá que integrar entre $-\infty$ y ϑ. Como $\varrho^2 + \varrho'^2 = a^2 e^{2m\vartheta}(1 + m^2)$, resulta:

$$s = a\sqrt{1 + m^2}\int_{-\infty}^{\vartheta} e^{m\vartheta}\, d\vartheta = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{m}\varrho.$$

Este valor coincide con la tangente polar (pág. 193).

EJERCICIOS:

1. Calcular la longitud total de la cardioide $\varrho = a(1 - \cos\vartheta)$.

   R: $8a$.

2. Calcular la longitud del arco de la parábola $\varrho = \dfrac{2}{1 + \cos\vartheta}$ comprendido entre $\vartheta = 0$ y $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$.

   R: $\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)$.

3. Verificar que la longitud de la curva $\varrho = 2\sec^2\frac{1}{2}\vartheta$ es igual a $2\left[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)\right]$, en el intervalo $\left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$.

4. Calcular la longitud total de la cardioide

$$\varrho = \cos^2\frac{1}{2}\vartheta.$$

   R: 4.

5. Verificar que la longitud de cada una de las siguientes circunferencias de radio 2 es 4π:

   a) $\varrho = 4\operatorname{sen}\vartheta$, b) $\varrho = 2\sqrt{2}(\cos\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta)$; c) $\varrho = 4\cos\vartheta$, d) $\varrho = 2$.

6. Calcular la longitud total de la lemniscata $\varrho^2 = a^2\cos 2\vartheta$.

   Por ser $2\varrho\, d\varrho = -2a^2\operatorname{sen} 2\vartheta\, d\vartheta$

   resulta $\quad d\varrho^2 = \dfrac{a^2\operatorname{sen}^2 2\vartheta}{\cos 2\vartheta}\, d\vartheta.$

Luego es

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2\, d\vartheta^2 = \frac{a^2 \operatorname{sen}^2 2\vartheta}{\cos 2\vartheta}\, d\vartheta^2 + a^2 \cos 2\vartheta\, d\vartheta^2 = \frac{a^2\, d\vartheta^2}{\cos 2\vartheta}.$$

La longitud total s de la lemniscata será igual a 4 veces la integral correspondiente al arco comprendido entre 0 y $\frac{1}{4}\pi$, es decir al arco situado en el primer cuadrante:

$$s = 4a \int_0^{\pi/4} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos 2\vartheta}} = 4a \int_0^{\pi/4} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - 2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}}.$$

Esta integral no puede calcularse con las funciones elementales, pero sí utilizando integrales elípticas.

En efecto, puesto que ϑ varía entre 0 y $\frac{1}{4}\pi$, sen ϑ varía entre 0 y $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, de modo que $\sqrt{2} \operatorname{sen} \vartheta$ variará entre 0 y 1. Podemos entonces hacer la sustitución $\sqrt{2} \operatorname{sen} \vartheta = \operatorname{sen} \varphi$ con φ variando entre 0 y $\frac{1}{2}\pi$.

Resulta

$$d\vartheta = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos \varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

y por consiguiente:

$$s = 4a \int_0^{\pi/4} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - 2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}} = \frac{4a}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi}}.$$

Esta última es una integral elíptica completa de primera especie de módulo $k = \frac{1}{\sqrt{2}} = \operatorname{sen} \alpha$, es decir $\alpha = 45°$.

De acuerdo a la tabla XXI del apéndice podemos escribir finalmente

$$s = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot F_1(k) = 2\sqrt{2} a F_1(45°) = 2\sqrt{2} a \times 1{,}8541 a \sim 5{,}24 a.$$

6. CURVATURA DE CURVAS PLANAS

Sea $y = f(x)$ una curva dada en coordenadas cartesianas y consideremos sobre ella dos puntos A y B. Sean AT y BT_1 las tangentes correspondientes que se cortan en R y forman con el eje de las abscisas los ángulos φ y φ_1, respectivamente.

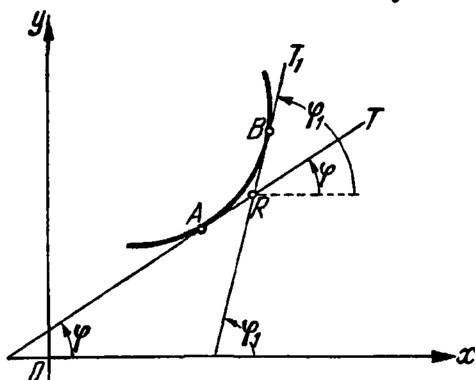


FIG. XII-8.

El ángulo de las tangentes BRT llamado *ángulo de contingencia*, es igual a $\varphi_1 - \varphi$ como lo muestra la figura.

Si designamos con Δs la longitud del arco AB y el án-

gulo de contingencia con $\Delta\varphi = BRT = \varphi_1 - \varphi$, ***definiremos* como *curvatura media*** C_m **del arco** AB **a la relación**

$$C_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$

Si el punto B tiende hacia el punto A, o sea si $\Delta s \to 0$ (y por consiguiente $\Delta x \to 0$) definimos como *curvatura* C en el punto A al límite:

$$C = \lim_{\Delta x \to 0} C_m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Calculemos estas diferenciales en base a la ecuación $y = f(x)$. Por ser $\operatorname{tg}\varphi = y'$ resulta $\varphi = \operatorname{arc\,tg} y'$ y por ello $d\varphi = \dfrac{y''\,dx}{1 + y'^2}$.

Por ser $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$, se tiene:

$$C = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{y''\,dx}{1 + y'^2} : (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad [1]$$

En la expresión de la curvatura sólo se considera el valor absoluto.

El valor recíproco de C es el *radio de curvatura* R.

EJEMPLOS:

1°) Calcular la curvatura de una recta.

En este caso la tangente coincide con la "curva"; luego φ es constante y $\Delta\varphi = 0$, por consiguiente $C_m = 0$ y también $C = 0$, es decir: la curvatura de una recta es nula.

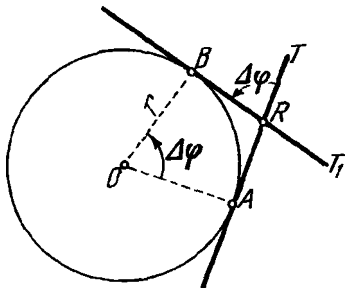


FIG XII-9.

2°) Calcular la curvatura de una circunferencia.

En este caso el ángulo $BRT = \Delta\varphi$ es igual al ángulo central BOA por tratarse de ángulos de lados perpendiculares. Como el arco AB es igual al producto del ángulo BOA (medido en radianes) por el radio r, resulta $\Delta s = r\Delta\varphi$ y se tiene

$$C_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{\Delta\varphi}{r\Delta\varphi} = \frac{1}{r} = C.$$

Es decir *la curvatura de una circunferencia es constantemente igual al valor recíproco del radio*

3°) Calcular la curvatura de la elipse de semiejes a y b en un punto $P(x, y)$. Caso particular $x = a$.

La ecuación de la elipse de semiejes a y b escrita en forma explícita es

$$y = \frac{b}{a}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Las dos primeras derivadas resultan:

$$y' = -\frac{bx}{a(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}; \quad y'' = -\frac{ab}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Reemplazando en la fórmula [1] y recordando que la excentricidad k de la elipse está dada por $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$, se tiene

$$C = \frac{-ab}{(a^2 - k^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En el caso particular del punto $(a, 0)$ es $|C| = \frac{a}{b^2}$.

Ejercicios:

1 Hallar la curvatura de la elipse de semiejes a, b en el punto $(0, b)$.

R. $\frac{b}{a^2}$.

2. Hallar la curvatura de la hipérbola de semiejes a, b en el punto $(a, 0)$.

R: $-\frac{a}{b^2}$.

3. Hallar la curvatura de la parábola

$$y^2 = 4px$$

en el origen.

R $\frac{1}{2}\frac{1}{p}$.

4. Hallar la curvatura de la función

$$y = \operatorname{sen} x$$

en el punto $x = \frac{1}{2}\pi$.

R -1

5 Hallar la curvatura de la parábola

$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$$

en un punto cualquiera.

R $\frac{1}{2}\frac{a^{\frac{1}{2}}}{(x + y)^{\frac{3}{2}}}$.

6 Hallar la curvatura de la catenaria

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

en un punto cualquiera.

R $^{-2}$

7. **Hallar la curvatura, en un punto cualquiera, de la hipocicliode de 4 puntas (o astroide)**

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

R: $\frac{1}{3}(axy)^{-\frac{1}{3}}$.

Hallar el radio de curvatura de las siguientes curvas en los puntos indicados:

8. $y = x^3$ **en** (1, 1). **R:** $\frac{10^{\frac{3}{2}}}{6}$.

9. $y^2 = x^3$ **en** (9, 27). **R:** $\frac{1}{2}85^{\frac{3}{2}}$.

10. $a^2y = bx^2 + cx^2y$ **en el origen.** **R:** $\frac{1}{2}\frac{a^2}{b}$.

11. $y = \ln \sec x$ **en** $x = x_1$. **R:** $\sec x_1$.

12. **Comprobar que el radio de curvatura de la hipérbola equilátera**

$$xy = k^2$$

está dado por

$$R = \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{2k^2}.$$

13. **Hallar el radio de curvatura de la cisoide**

$$x(x^2 + y^2) - 2ay^2 = 0$$

en un punto cualquiera.

R: $\frac{1}{3}a \frac{(8a - 3x)^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}(2a - x)^2}$.

14. Verificar que el radio de curvatura de la curva

$$y = mx + n(x - a)^2(x - b)^2$$

tiene el mismo valor en los puntos de abscisas a y b.

R: $\frac{(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}}{2n(a - b)^2}$.

15. Verificar que el radio de curvatura de la curva

$$ay^2 = (x - \alpha)(x - \beta)^2$$

en el punto $(\alpha, 0)$ es igual a $\frac{(\alpha - \beta)^2}{2a}$.

16. Verificar que el radio de curvatura de la curva

$$y^2 = \frac{a^2(a + x)}{x}$$

en el punto $(-a, 0)$ es igual a $\frac{1}{2}a$.

17. Verificar que el radio de curvatura de la curva

$$y^2 = \frac{a^2(a-x)}{x}$$

en el vértice es igual a $\frac{1}{2}a$.

18. Verificar que el radio de curvatura de la curva

$$a^2y^2 = x^3(a-x)$$

en el punto $(a, 0)$ es igual a $2a^2$.

19. Verificar que el radio de curvatura de la parábola

$$(x-y)^2 - 2a(x+y) + a^2 = 0$$

es igual a $2a$ en los puntos en que la curva toca a los ejes coordenados.

20. Hallar el radio de curvatura de la curva

$$y = 4 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x$$

en el punto $x = \frac{1}{2}\pi$.

R: $1{,}25\sqrt{5}$.

21. ¿En qué puntos es mínimo el radio de curvatura de la curva $50y = x^3$?

R: $x = \pm\frac{2}{3}$.

22. Determinar el radio de curvatura de la función

$$y = e^{-x^2}$$

en el punto $(1, e^{-1})$.

R: $\frac{(e^2+4)^{\frac{3}{2}}}{2e^2}$.

23. Hallar el radio de curvatura de la curva

$$y = x \cdot \ln x$$

en el punto (e, e).

R: $2\sqrt{2}e$.

24. Hallar el radio de curvatura de la curva

$$y = \operatorname{cotg} x$$

en el punto $\left(\frac{1}{4}\pi,\ 1\right)$.

R: $\frac{1}{4}5\sqrt{5}$.

25. Hallar el radio de curvatura de la curva

$$y = x + \frac{2}{x}$$

en el punto (2, 3).

R: 27.

26. Determinar el radio de curvatura de la curva

$$y = x^4 - x^2$$

en sus puntos extremales (máximos, mínimos y puntos de inflexión).

R: En el máximo $x = 0$, $R = \frac{1}{2}$; en los mínimos $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $R = \frac{1}{4}$.

En el punto de inflexión es $R = \infty$.

27. Determinar en qué punto de la curva

$$y = e^x,$$

la curvatura es máxima o mínima.

R: $-\frac{1}{2}\ln 2 \cong -0{,}346$ (Máx).

28. Determinar el radio de curvatura de la curva

$$x = \frac{y^4}{4} + \frac{1}{8y^2}$$

en el punto de ordenada $y = 1$.

R: $\frac{25}{48}$.

7. CURVATURA EN COORDENADAS PARAMETRICAS

Demostraremos que la curvatura de una curva dada en forma paramétrica

$$x = x(t), \qquad y = y(t),$$

está expresada por la fórmula

$$C = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

donde los acentos indican derivadas respecto del parámetro t.

En efecto: siendo $\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'}{x'}$ resulta $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y'}{x'}$

y se tendrá

$$d\varphi = \frac{1}{1 + \left(\frac{y'}{x'}\right)^2} \cdot d\left(\frac{y'}{x'}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y'}{x'}\right)^2} \cdot \frac{y''x' - y'x''}{x'^2}\,dt =$$

$$= \frac{y''x' - x''y'}{x'^2 + y'^2}\, dt.$$

Además, como es $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt =$

$= \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$, resulta

$$C \doteq \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{y''x' - x''y'}{x'^2 + y'^2}\, dt}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}\, dt} = \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

o bien

$$C = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad [2]$$

empleando para la última expresión la notación de los determinantes.

EJEMPLO:

Calcular la curvatura C de la cicloide

$$\begin{cases} x = r(t + \operatorname{sen} t). \\ y = r(1 + \cos t). \end{cases}$$

Siendo

$$x' = r(1 + \cos t), \qquad x'' = -r \operatorname{sen} t,$$

$$y' = -r \operatorname{sen} t, \qquad y'' = -r \cos t,$$

reemplazando en [2] resulta:

$$x'y'' - x''y' = -r^2(\cos t + \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) = -r^2(1 + \cos t) =$$

$$= -2r^2 \cos^2 \frac{1}{2}t,$$

$$x'^2 + y'^2 = r^2(1 + 2\cos t + \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) = 2r^2(1 + \cos t) =$$

$$= 4r^2 \cos^2 \frac{1}{2}t,$$

$$C = \frac{-2r^2 \cos^2 \frac{1}{2}t}{8r^3 \cos^3 \frac{1}{2}t} = -\frac{1}{4r \cos \frac{1}{2}t} = -\frac{1}{4r} \sec \frac{1}{2}t.$$

EJERCICIOS:

1. Mostrar que el radio de curvatura de la curva

$$\begin{cases} x = at^2 \\ y = 2at \end{cases}$$

es igual a $2a$ en el origen.
(Verificar que se trata de una parábola de eje horizontal).

2. Hallar el radio de curvatura de la curva

$$x = t, \qquad y = 2t^2 + 1$$

en el punto $t = 0$.

R: $\frac{1}{4}$.

3. Hallar el radio de curvatura de la curva

$$x = 3t^2, \qquad y = t - 1$$

en el punto $t = 0$.

R: $\frac{1}{6}$.

4. Hallar el radio de curvatura de la curva

$$x = t^3, \qquad y = t^2$$

en el punto $t = 1$.

R: $\frac{1}{6} 13\sqrt{13}$.

5. Hallar el radio de curvatura de la curva

$$x = t, \qquad y = \frac{1}{t}$$

en el punto $t = 1$.

R: $\sqrt{2}$.

6. Hallar el radio de curvatura de la curva

$$x = e^t, \qquad y = e^{-t}$$

en el punto $t = 0$.

R: $\sqrt{2}$.

7. Verificar que el radio de curvatura de la circunferencia dada en coordenadas paramétricas

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \operatorname{sen} t \end{cases}$$

es constante e igual a a.

8. Hallar el radio de curvatura de la curva

$$x = 4 \cos t, \qquad y = 2 \operatorname{sen} t$$

en el punto $t = \frac{1}{6}\pi$.

R: $7\sqrt{7} : 8 \sim 2{,}32$.

9. Hallar el radio de curvatura de la curva

$$x = \operatorname{tg} t, \qquad y = \operatorname{cotg} t$$

en el punto $t = \frac{1}{4}\pi$.

R: $\frac{1}{8}\sqrt{2}$.

10. Hallar el radio de curvatura de la curva

$$\begin{cases} x = 2(t - \operatorname{sen} t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$$

en el punto $t = \pi$.

R: 8.

11. Hallar el radio de curvatura de la astroide dada en forma paramétrica

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \operatorname{sen}^3 t \end{cases}$$

en un punto cualquiera. Compárese con el resultado hallado en el ejercicio 7 del § 6, cuando la curva estaba dada en forma cartesiana.

: $\frac{3}{2} a \operatorname{sen} 2t$.

12. Hallar el radio de curvatura de la siguiente curva dada en forma paramétrica

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t) \\ y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t) \end{cases}$$

en el punto $t = \pi$.

R: $a\pi$.

13. Hallar el radio de curvatura de la parábola

$$\begin{cases} x = a \cos^4 t \\ y = a \operatorname{sen}^4 t \end{cases}$$

en el punto $t = \frac{1}{2}\pi$.

R: $2a$.

14. Hallar el radio de curvatura en el punto $t = 0$ de la curva de Lissajous

$$\begin{cases} x = a \cos nt \\ y = b \operatorname{sen} 2nt \end{cases}$$

R: $\frac{4b^2}{a}$.

15. Verificar que el radio de curvatura de la epicicloide

$$\begin{cases} x = a_1 \cos n_1 t + a_2 \cos n_2 t \\ y = a_1 \operatorname{sen} n_1 t + a_2 \operatorname{sen} n_2 t \end{cases}$$

en los puntos más próximos y más alejados del centro, es igual a $\dfrac{(n_1a_1 \pm n_2a_2)^2}{n_1^2a_1 \pm n_2^2a_2}$.

(Obsérvese que en los puntos más próximos y más alejados del centro el parámetro vale $t = 0$ y $t = \frac{1}{2}\pi$, respectivamente).

8. CURVATURA EN COORDENADAS POLARES

Demostraremos que la curvatura de una curva dada en coordenadas polares

$$\varrho = \varrho(\vartheta)$$

está expresada por la fórmula

$$C = \frac{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''}{(\varrho^2 + \varrho'^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad [3]$$

donde los acentos indican derivadas respecto de ϑ.

En efecto: recordando que las coordenadas cartesianas y polares están vinculadas por las relaciones

$$x = \varrho \cos \vartheta, \qquad y = \varrho \operatorname{sen} \vartheta, \qquad [4]$$

pueden considerarse a éstas como funciones paramétricas del ángulo ϑ.

Para aplicar la fórmula [2] derivemos las [4] respecto del parámetro ϑ, teniendo siempre en cuenta que ϱ es función de ϑ.

$$x' = \varrho' \cos \vartheta - \varrho \operatorname{sen} \vartheta, \quad x'' = \varrho'' \cos \vartheta - 2\varrho' \operatorname{sen} \vartheta - \varrho \cos \vartheta,$$

$$y' = \varrho' \operatorname{sen} \vartheta + \varrho \cos \vartheta, \quad y'' = \varrho'' \operatorname{sen} \vartheta + 2\varrho' \cos \vartheta - \varrho \operatorname{sen} \vartheta$$

Efectuando operaciones resulta

$$x'y'' - x''y' = \varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho'',$$

$$(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = (\varrho^2 + \varrho'^2)^{\frac{3}{2}},$$

y el cociente da la fórmula buscada.

EJEMPLO.

Mostrar que el radio de curvatura de la espiral logarítmica

$$\varrho = e^{a\vartheta}$$

es proporcional a ϱ

Siendo $\varrho' = ae^{a\vartheta}$, $\varrho'' = a^2e^{a\vartheta}$ reemplazando en [3] se tiene:

$$C = \frac{e^{2a\vartheta} + 2a^2e^{2a\vartheta} - a^2e^{2a\vartheta}}{(e^{2a\vartheta} + a^2e^{2a\vartheta})^{\frac{3}{2}}} = \frac{e^{2a\vartheta}(1 + a^2)}{e^{3a\vartheta}(1 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{e^{a\vartheta}(1 + a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

y el radio de curvatura resulta

$$R = \frac{1}{C} = e^{a\vartheta}(1 + a^2)^{\frac{1}{2}} = \varrho(1 + a^2)^{\frac{1}{2}},$$

con lo que se ve la proporcionalidad entre R y ϱ, siendo la constante de proporcionalidad $\sqrt{1 + a^2}$.

EJERCICIOS:

1. Hallar el radio de curvatura de la espiral de Arquímedes

$$\varrho = a\vartheta$$

en el origen.

R: $\frac{1}{2}a$.

2. Hallar el radio de curvatura de la cardioide

$$\varrho = a(1 - \cos\vartheta)$$

en el punto $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$.

R: $\frac{2}{3}\sqrt{2}a$.

3. Idem de la lemniscata

$$\varrho^2 = a^2 \cos 2\vartheta$$

en el punto $\vartheta = 0$.

R: $\frac{1}{3}a$.

4 Idem de la trisectriz

$$\varrho = a(2\cos\vartheta - 1)$$

en el punto $\vartheta = 0$.

R· $\frac{1}{3}a$.

5. Idem de la espiral hiperbólica

$$\varrho = \frac{a}{\vartheta}$$

en el punto $\vartheta = 1$ radian.

R· $2\sqrt{2}a$.

6. Verificar que en la hipérbola

$$\varrho^2 \cos 2\vartheta = a^2$$

el radio de curvatura está dado por $\frac{\varrho^3}{a^2}$.

Comparar con el resultado hallado en el ejercicio 12 del § 6

7. **Hallar el radio de curvatura de la curva $\varrho^m = a^m \cos m\theta$ en un punto cualquiera.**

R: $\dfrac{a^m}{(m+1)\varrho^{m-1}}$.

8. **Hallar el radio de curvatura de la curva $\varrho = a^{n\theta}$ $(a > 0)$ en un punto cualquiera.**

(Téngase en cuenta la identidad $A^B = e^{B \ln A}$ y el caso de la espiral logarítmica).

R: $\varrho\sqrt{1 + (n \ln a)^2}$.

9. EXPRESION VECTORIAL DE LA CURVATURA

Consideremos una curva $\mathscr{C}$ referida a un sistema cartesiano y en cada uno de sus puntos P, P_1, ..., el vector $\mathbf{t}$, $\mathbf{t}_1$, ... tangente, de módulo 1 y con el sentido de los arcos crecientes.

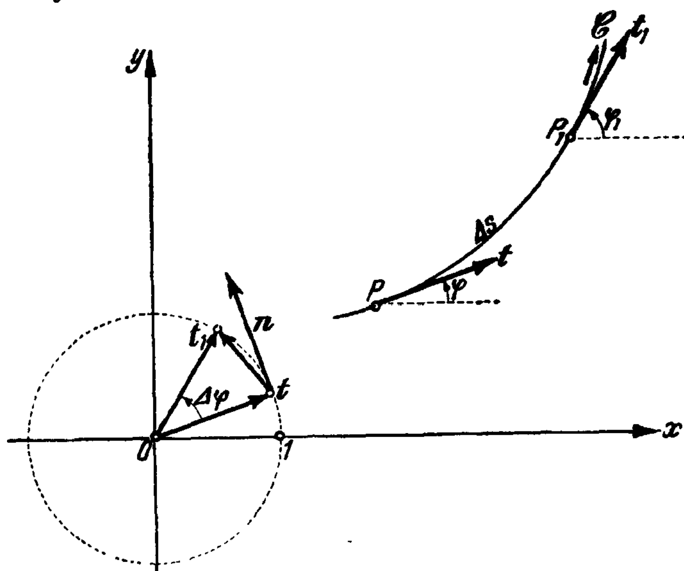


FIG. XII-10.

Calcularemos la derivada del vector $\mathbf{t}$ respecto del arco s.

Por el origen O de coordenadas trazamos sendos *vectores equipolentes* a $\mathbf{t}$, $\mathbf{t}_1$, ..., es decir, vectores de igual dirección, sentido e intensidad. Por consiguiente el lugar geométrico de estos vectores será una circunferencia de centro O y radio 1.

Si los ángulos que los vectores $\mathbf{t}$, $\mathbf{t}_1$, ..., forman con el eje de las x son φ, φ_1, ..., el ángulo central determinado por los vectores equipolentes será $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$.

Evidentemente es $\frac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta s} = \frac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta \varphi} \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta s}$. Pero el límite del cociente $\frac{\Delta \varphi}{\Delta s}$ es por definición la curvatura $C = \frac{1}{R}$ de la curva en P y el límite de $\frac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta \varphi}$ es un vector $\mathbf{n}$ unitario, tangente a la circunferencia y por consiguiente normal a $\mathbf{t}$ como lo muestra la figura 10. Resulta

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{R}\mathbf{n}.$$

Movimiento de un punto sobre una curva: Consideremos un punto móvil sobre una curva $\mathscr{C}$. A cada valor de t corresponde una posición del punto sobre la curva. Se define como *velocidad escalar* v el límite de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ cuando $\Delta t \to 0$, siendo Δs el arco correspondiente al intervalo de tiempo Δt. En la misma forma se define la *aceleración escalar* a como $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$. Por consiguiente es

$$v = \frac{ds}{dt}, \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

La interpretación vectorial de estos conceptos nos permitirá obtener otros resultados.

Consideremos la curva $\mathscr{C}$ descripta por un punto $P(t)$. Si al cabo del tiempo Δt el punto ha pasado de P a P_1, el vector $(P - O)$ ha experimentado un incremento ΔP.

Definimos como *velocidad vectorial* $\mathbf{v}$ a la relación:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{dP}{dt}.$$

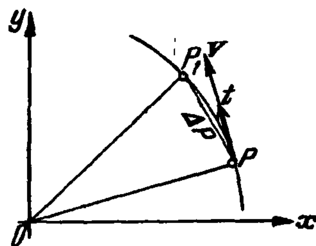


Fig. XII-11.

Como podemos escribir la definición de velocidad escalar,

$$v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{|\Delta P|} \frac{|\Delta P|}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta P}{\Delta t} \right| = \left| \frac{dP}{dt} \right|$$

pues $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{|\Delta P|} = 1$, dado que el cociente entre el arco Δs y la cuerda $|\Delta P|$ tiende a 1, resulta que la velocidad escalar es el *módulo* de la *velocidad vectorial.*

Ya hemos visto que la derivada de un vector respecto de un escalar es un vector tangente a la trayectoria. Por consiguiente si $\mathbf{t}$

designa el vector unitario tangente a la trayectoria en el sentido de los arcos crecientes es

$$\mathbf{v} = v\mathbf{t}.$$

La aceleración vectorial **a** es, por definición, la derivada de la velocidad vectorial respecto del tiempo. Teniendo en cuenta la expresión de la curvatura $\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{R}\mathbf{n}$, resulta

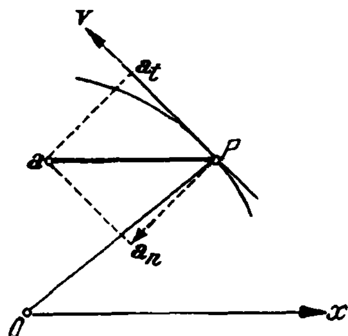


FIG. XII-12.

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{t}) = \frac{dv}{dt}\mathbf{t} + v\frac{d\mathbf{t}}{dt} =$$

$$= a\mathbf{t} + v\frac{d\mathbf{t}}{ds}\frac{ds}{dt} = a\mathbf{t} + v^2\frac{1}{R}\mathbf{n},$$

lo cual muestra que mientras la velocidad escalar está dirigida en la dirección de la tangente, la aceleración vectorial tiene —en general— dos componentes:

Componente tangencial de la aceleración. $a_t = a$,

Componente normal de la aceleración: $a_n = \frac{v^2}{R}$,

donde v y a son la velocidad y aceleración escalares.

En particular si un punto se mueve sobre una circunferencia con movimiento circular *uniforme* es $a_t = 0$ y $a_n = \frac{v^2}{R}$ donde R es el radio de la circunferencia.

COMPONENTES POLARES DE LA ACELERACIÓN Determinaremos las componentes de la aceleración según otras dos direcciones perpendiculares: una en la dirección del radio vector $(P - O)$ y otra en la dirección normal a este radio vector. La primera se designa con el nombre de *aceleración radial* a_r y la segunda con el nombre de *aceleración transversal* a_φ.

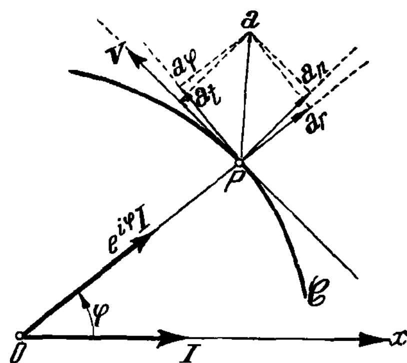


FIG XII-13

La ecuación vectorial de la trayectoria es [1]

$$P - O = re^{i\varphi}\mathbf{I}$$

donde **I** es el vector unitario en la dirección del eje polar y r y φ dos funciones variables con el tiempo.

---

(1) Téngase en cuenta la notación adoptada en la página 198

Derivando 2 veces respecto del tiempo t resulta (si los acentos designan las derivadas respecto de esa variable):

$$\frac{dP}{dt} = r' e^{i\varphi} \mathbf{I} + r i e^{i\varphi} \varphi' \mathbf{I},$$

$$\frac{d^2P}{dt^2} = r'' e^{i\varphi} \mathbf{I} + 2r' i e^{i\varphi} \varphi' \mathbf{I} + r i e^{i\varphi} \varphi'' \mathbf{I} + r i^2 e^{i\varphi} \varphi'^2 \mathbf{I},$$

que se puede escribir

$$\mathbf{a} = \frac{d^2P}{dt^2} = (r'' - r\varphi'^2) e^{i\varphi} \mathbf{I} + (2r'\varphi' + r\varphi'') i e^{i\varphi} \mathbf{I}.$$

El vector $e^{i\varphi} \mathbf{I}$ es un vector unitario en la dirección $(P - O)$ y el vector $i e^{i\varphi} \mathbf{I}$ es el vector perpendicular al anterior. Resulta entonces que las componentes polares de la aceleración son:

$$a_r = r'' - r\varphi'^2, \quad a_\varphi = 2r'\varphi' + r\varphi''.$$

Movimiento central: Se denomina así al movimiento cuya aceleración está constantemente dirigida hacia un punto fijo O. Adoptando este punto como origen, la ecuación del movimiento central será:

$$a_\varphi = 0. \qquad [1]$$

Como además se puede escribir idénticamente

$$a_\varphi = 2r'\varphi' + r\varphi'' = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\varphi'),$$

resulta que la condición [1] equivale a la siguiente:

$$r^2\varphi' = \text{constante} = C.$$

Multiplicando por dt resulta

$$r^2 d\varphi = C\, dt$$

y como el primer miembro representa el doble del elemento de área dS en coordenadas polares, se tiene

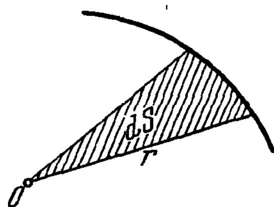


Fig. XII-14.

$$dS = \tfrac{1}{2} C\, dt = C'\, dt.$$

Las áreas barridas por el radio vector en un movimiento central son proporcionales a los tiempos (2.ª ley de Kepler).

Como la expresión $\frac{dS}{dt}$ se llama *velocidad areolar*, se dice también que *en el movimiento central la velocidad areolar es constante.*

10. CIRCULO OSCULADOR

Dada una curva cuya ecuación en coordenadas cartesianas es $y = f(x)$, se trata de calcular la ecuación de una circunferencia de centro $C(\alpha, \beta)$ y radio R que además de pasar por un punto $P(x, y)$ de la curva, tenga en ese punto la misma derivada primera y' y la misma derivada segunda y'' que la curva dada. Esta circunferencia se llama *circunferencia osculatriz* o *círculo osculador* (1). Su ecuación será

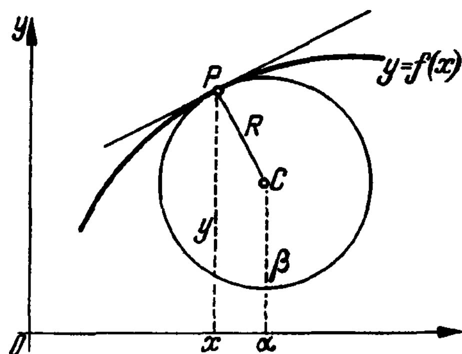


FIG. XII-15.

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \quad [1]$$

y determinaremos los tres parámetros: α, β, R, en base a las tres condiciones que debe cumplir la circunferencia: para el valor x correspondiente a P, los valores de y, y', y'' deben coincidir con los de la curva dada.

Derivando respecto de x la expresión [1] resulta (después de simplificar por 2)

$$(x-\alpha)+(y-\beta)y'=0. \quad [2]$$

Derivando una segunda vez se tiene:

$$1+y'^2+(y-\beta)y''=0. \quad [3]$$

Las relaciones [1], [2], [3], resuelven el problema. En efecto, de [3] se obtiene:

$$y-\beta=-\frac{1+y'^2}{y''}.$$

De [2] y [3]:

$$x-\alpha=\frac{(1+y'^2)y'}{y''}.$$

De [1], [2] y [3]:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\frac{(1+y'^2)^2y'^2}{y''^2}+\frac{(1+y'^2)^2}{y''^2}=$$

$$=\frac{(1+y'^2)^2(1+y'^2)}{y''^2}=\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}=R^2$$

(1) *Osculación* proviene del latín *osculari*, besar, de *osculum*, beso, propiamente boquita, boca pequeña, como diminutivo de *os*, boca.

y por consiguiente el radio del *círculo osculador* es:

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Esta expresión coincide precisamente con el radio de curvatura definido en el § 6 (pág. 424).

El signo R está dado por el signo de y'' pues la raíz del numerador se considera siempre positiva.

El punto C recibe el nombre de *centro de curvatura.*

EJEMPLO:

Hallar la ecuación del círculo osculador correspondiente a la parábola

$$y = x^2,$$

en el vértice.

Siendo $y' = 2x$; $y'' = 2$ resulta en el origen $(0, 0)$: $y' = 0$; $y'' = 2$ y por consiguiente $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$, $R = \frac{1}{2}$.

En este caso también coincide en el origen la derivada tercera de la curva y del círculo pero no la derivada cuarta. Esto permite asegurar que el círculo osculador estará íntegramente dentro de la parábola.
(El lector verificará fácilmente estos resultados haciendo la representación gráfica).

EJERCICIOS:

1. Determinar el centro de curvatura de la curva

$$y = 2x^2$$

en el origen.
R: $\alpha = 0$; $\beta = \frac{1}{4}$.

2 Hallar los círculos osculadores correspondientes a la curva

$$y = \operatorname{sen} x$$

para $x = \frac{1}{4}\pi$, $x = \frac{1}{2}\pi$. ¿Qué sucede en $x = 0$? ¿Atraviesa el círculo osculador a la sinusoide en el punto $x = \frac{1}{4}\pi$? ¿y en el punto $x = \frac{1}{2}\pi$?

R: $\alpha = \frac{1}{4}\pi + \frac{3}{2}$, $\beta = -\sqrt{2}$, $R = \frac{3}{2}\sqrt{3}$; $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, $\beta = 0$, $R = 1$.

El círculo atraviesa la curva en el primer punto porque allí las y''' difieren y no lo atraviesa en el segundo porque tienen igual y'''.

3. Determinar el centro de curvatura de

$$y = 2 \cos \frac{1}{2} x$$

en el punto de abscisa $x = 2\pi$.
R: $\alpha = 2\pi$; $\beta = 0$.

4 Verificar que en la catenaria el radio del círculo osculador es igual en valor absoluto a la normal N y proporcional al cuadrado de la ordenada.

R: $\frac{y^2}{a}$.

5 Determinar el centro de curvatura de la curva

$$x - y^2 = 2$$

en el punto (3, 1).

Verifíquese que el segmento determinado por el punto dado y el centro coincide con el radio de curvatura y que dicho centro pertenece a la normal a la curva en el punto dado.

R: $\alpha = \frac{11}{2}$, $\beta = -4$.

6 Verificar que el centro C del círculo osculador de la curva $y = f(x)$ en el punto P está sobre la normal a la curva en el punto P.

Solución: De acuerdo a las expresiones obtenidas para $(x - \alpha)$ e $(y - \beta)$ resulta dividiendo miembro a miembro

$$\frac{y - \beta}{x - \alpha} = -\frac{\dfrac{1 + y'^2}{y''}}{\dfrac{(1 + y'^2)\,y'}{y''}} = -\frac{1}{y'}.$$

El primer cociente mide la pendiente de la recta PC (ver fig. 15) y puesto que $-\frac{1}{y'}$ es la pendiente de la recta normal a la curva dada, la proposición queda demostrada.

7. Determinar el centro de curvatura de la hipérbola

$$y = \frac{6}{x}$$

en el punto de abscisa $x = 1$.

R: $\alpha = +19{,}5$, $\beta = \frac{109}{12}$.

8 Determinar el centro de curvatura de la hipérbola

$$x^2 - y^2 = a^2$$

en un punto cualquiera.

R: $\alpha = 2\frac{x^3}{a^2}$; $\beta = -2\frac{y^3}{a^2}$.

9. Determinar el centro de curvatura de la elipse

$$9x^2 + y^2 = 25$$

en el punto (1, 4)

R: $\alpha = -\frac{72}{25}$; $\beta = \frac{512}{225}$.

10. Determinar el centro de curvatura de la curva

$$2xy - y^2 = 4$$

en el punto $\left(\frac{5}{2}, 1\right)$.

R: $\alpha = \frac{29}{9}$; $\beta = \frac{25}{12}$.

11. Verificar que el centro de curvatura de la parábola

$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$$

en el punto $(a, 0)$ tiene coordenadas $\alpha = a$, $\beta = 2a$.

Verifíquese además que para cualquier punto de la curva se tiene

$$\alpha + \beta = 3(x + y).$$

12. Determinar el centro de curvatura de la astroide

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

en un punto cualquiera.

R: $\alpha = x - 3y^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}$; $\beta = y - 3x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$.

13. Determinar el centro de curvatura de la curva

$$y = \ln x$$

en el punto $(1, 0)$.

R: $\alpha = 3$; $\beta = -2$.

14. Determinar el centro de curvatura de la curva

$$y = \operatorname{tg} x$$

en el punto de abscisa $x = \frac{1}{4}\pi$.

R: $\alpha = \frac{1}{4}\pi - \frac{5}{2}$; $\beta = \frac{9}{4}$.

15. Determinar el centro de curvatura de la curva

$$y = e^x$$

en el punto de abscisa $x = 0$.

R: $\alpha = -2$; $\beta = 3$.

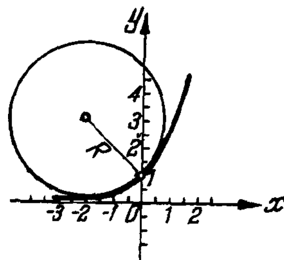


FIG. XII-16.

16. Verificar que las coordenadas del centro y el radio del círculo osculador de una curva dada en forma paramétrica

$$x = x(t), \qquad y = y(t),$$

son

$$\alpha = x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x' y'' - x'' y'};$$

$$\beta = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x' y'' - x'' y};$$

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x' y'' - x'' y'},$$

donde los acentos indican derivadas respecto del parámetro t.

CONSTRUCCIÓN GRÁFICA DEL CENTRO DE CURVATURA: Sea $y = f(x)$ una función continua con derivadas continuas cuya representación gráfica es una curva $\mathscr{C}$ Determinaremos el centro de curvatura en uno de sus puntos P.

Si trazamos la tangente PT y consideramos el segmento $PQ = 1$, resulta $TQ = y'$.

A partir de P tracemos $PM = y''$ en la dirección del eje de las ordenadas (y con el sentido dado por su signo). Desde M se traza una paralela a PT hasta cortar a la normal PC en L. Si ahora se une L con T y se traza $TC \perp LT$, se determina sobre la normal un punto C que es el centro de curvatura buscado.

En efecto, siendo

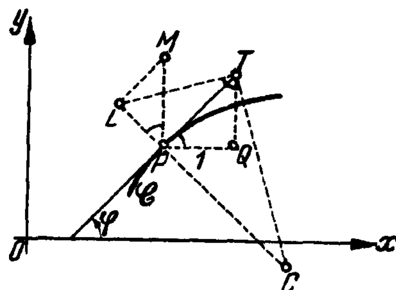


FIG. XII-17.

$$y' = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{es} \quad 1 + y'^2 = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$$

y por consiguiente

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{1}{y'' \cos^3 \varphi}.$$

De acuerdo a la construcción efectuada en el triángulo PTQ es $PT = \dfrac{1}{\cos \varphi}$ y en el triángulo LMP, $LP = y'' \cos \varphi$.

Como el triángulo LTC es rectángulo en T, la altura PT es medio proporcional entre los segmentos que determina sobre la hipotenusa: $PT^2 = LP \cdot PC$, es decir $PC = \dfrac{PT^2}{LP} = \dfrac{1}{y'' \cos^3 \varphi} = R$ y por consiguiente C es el centro de curvatura.

11. EVOLUTA DE UNA CURVA. EVOLVENTE

Considerando el punto P variable sobre la curva se tendrán infinitos círculos osculadores. Los respectivos *centros* describirán una curva que se llama *evoluta*.

De acuerdo a los resultados anteriores las ecuaciones paramétricas de la evoluta son:

$$\alpha = x - \frac{(1 + y'^2)\, y'}{y''}, \quad \beta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Para cada valor de x, el valor de y (y el valor de y' y el valor de y'') queda determinado por la ecuación de la curva.

Así se tendrá en el plano (α, β) una curva cuya pendiente será $\frac{d\beta}{d\alpha}$.

La curva primitiva se llama también *evolvente* de la curva *evoluta.*

Ejemplos:

1°) Verificar que la evoluta de la parábola de eje horizontal

$$y^2 = 2px$$

es una parábola semicúbica.
Siendo

$$y' = \frac{p}{y}; \qquad y'' = -\frac{p^2}{y^3}$$

es

$$\alpha = 3x + p$$

$$\beta = -\frac{y^3}{p^2}.$$

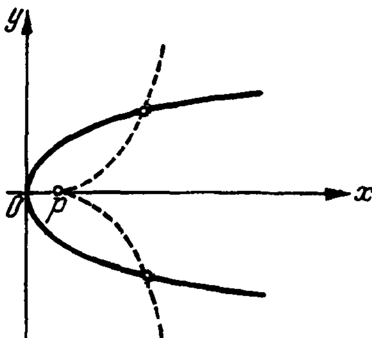


Fig. XII-18.

Despejando de estas expresiones x e y y reemplazándolas en la ecuación de la curva dada se obtiene la ecuación de la evoluta:

$$\beta^2 p = \frac{8}{27}(\alpha - p)^3$$

que en el plano (α, β) es una parábola semicúbica.

2°) Verificar que la evoluta a la curva:

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t) \\ y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t) \end{cases}$$

es una circunferencia de centro en el origen y radio a.

En efecto, designando con $\dot{x}$, $\dot{y}$ las derivadas de x e y respecto de t y conservando los acentos para las derivadas respecto de x, es

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a\,t \operatorname{sen} t}{a\,t \cos t} = \operatorname{tg} t,$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = (\operatorname{tg} t)^{\cdot} \cdot \frac{1}{\dot{x}} = \frac{1}{a\,t \cos^3 t},$$

con lo que resulta la circunferencia en el plano (α, β):

$$\alpha = a(\cos t + t \operatorname{sen} t) - a\,t \operatorname{sen} t = a \cos t,$$

$$\beta = a(\operatorname{sen} t - t \cos t) + a\,t \cos t = a \operatorname{sen} t.$$

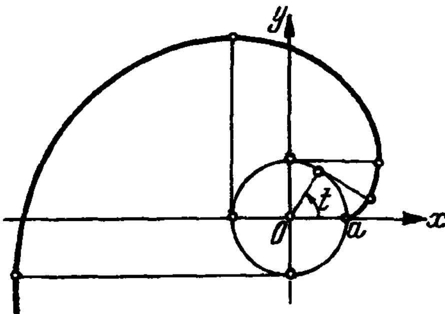


Fig. XII-19.

EJERCICIOS·

1 Verificar que las tangentes a la evoluta de una curva (llamada evolvente) son normales de la curva evolvente.
Solución. Por ser

$$\alpha = x - \frac{(1 + y'^2)y'}{y''},$$

$$\beta = y + \frac{1 + y'^2}{y''},$$

resulta derivando respecto de x

$$\frac{d\alpha}{dx} = 1 - y'' \frac{(1 + y'^2)}{y''} - y' \frac{d}{dx}\left(\frac{1 + y'^2}{y''}\right) =$$

$$= - y'\left[y' + \frac{d}{dx}\left(\frac{1 + y'^2}{y''}\right)\right],$$

$$\frac{d\beta}{dx} = y' + \frac{d}{dx}\left(\frac{1 + y'^2}{y''}\right).$$

Dividiendo ordenadamente se tiene

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = - \frac{1}{y'}.$$

Pero $\frac{d\beta}{d\alpha}$ es la pendiente de la tangente a la evoluta y siendo $-\frac{1}{y'}$ la pendiente de la normal de la evolvente, la proposición queda demostrada

2 Verificar que la evoluta de una cicloide engendrada por una circunferencia de radio r es otra cicloide igual que está desplazada de $r\pi$ en el sentido de las x positivas y de $2r$ en el sentido de las y negativas.

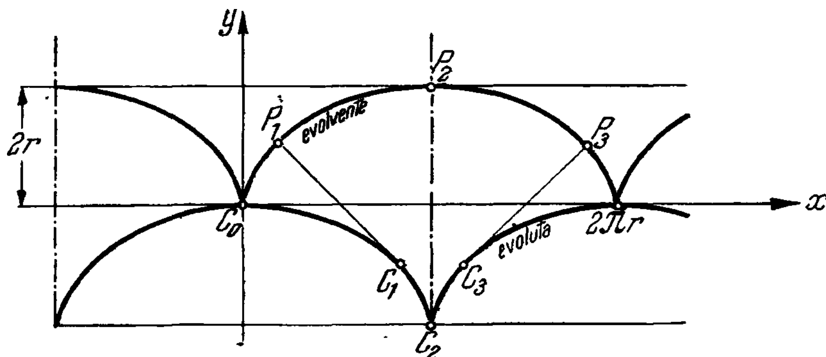


FIG. XII-20.

Solución: Siendo la expresión de la cicloide

$$\begin{cases} x = r(t - \operatorname{sen} t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$$

resulta, indicando con puntos las derivadas respecto de t y con acentos las derivadas respecto de x.

$$\dot{x} = r(1 - \cos t),$$

$$\dot{y} = r \operatorname{sen} t,$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\operatorname{sen} t}{1 - \cos t}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt}\,\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\operatorname{sen} t}{1 - \cos t}\right)\frac{1}{r(1 - \cos t)} = -\,\frac{1}{r(1 - \cos t)^2}$$

y se obtiene.

$$\alpha = r(t + \operatorname{sen} t),$$

$$\beta = -\,r(1 - \cos t).$$

Si en estas expresiones que dan las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la cicloide, hacemos $t = \pi + \tau$, se obtiene, con τ como nuevo parámetro

$$\alpha = r\pi + r(\tau - \operatorname{sen} \tau)$$

$$\beta = -\,r(1 + \cos \tau) = -\,2r + r(1 - \cos \tau)$$

que es una cicloide desplazada respecto de la primitiva de $r\pi$ según el eje de las x positivas y de $2r$ según el eje de las y negativas

3. Determinar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la epicicloide

$$\begin{cases} x = (R + r)\cos \dfrac{r}{R}t - r\cos \dfrac{R + r}{R}t \\[2ex] y = (R + r)\operatorname{sen} \dfrac{r}{R}t - r\operatorname{sen} \dfrac{R + r}{R}t. \end{cases}$$

Verificar que es otra epicicloide reducida en la relacion $\dfrac{R}{R + 2r}$ después de girar la magnitud $\pi\dfrac{R}{r}$.

4. Idem de la hipocicloide

$$\begin{cases} x = (R - r)\cos \dfrac{r}{R}t - r\cos \dfrac{R - r}{R}t \\[2ex] y = (R - r)\operatorname{sen} \dfrac{r}{R}t - r\operatorname{sen} \dfrac{R - r}{R}t. \end{cases}$$

Verificar que es otra hipocicloide ampliada en la relación $\dfrac{R}{R - 2r}$ después de girar la magnitud $-\,\pi\dfrac{r}{R}$.

5. Determinar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la curva

$$\begin{cases} x = a\cos t + (at - b)\operatorname{sen} t \\ y = a\operatorname{sen} t - (at - b)\cos t. \end{cases}$$

R: $\alpha = a\cos t,\ \beta = a\operatorname{sen} t.$

6. Determinar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la curva

$$x = 2t, \qquad y = 3t^2.$$

R: $\alpha = -12t^3;\ \beta = 9t^2 + \dfrac{3}{2}.$

7. Determinar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la curva

$$x = 2t, \qquad y = 1 - t^2.$$

R: $\alpha = -2t^3;\ \beta = -3t^2 - 1.$

8. Determinar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la curva

$$x = 1 - t^2, \qquad y = 2t.$$

R: $\alpha = -1 - 3t^2;\ \beta = -2t^3.$

9. Determinar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la curva

$$x = \frac{1}{t}, \qquad y = \frac{1}{2}t.$$

R: $\alpha = \dfrac{1}{8}t^3 + \dfrac{3}{2}\,\dfrac{1}{t};\quad \beta = \dfrac{3}{4}t + \dfrac{1}{t^3}.$

10. Determinar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la curva

$$x = t^2, \qquad y = 2t^3.$$

R: $\alpha = -t^2(1 + 18t^2);\quad \beta = 8t^3 + \dfrac{2}{3}t.$

11 Determinar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la curva

$$x = t^2, \qquad y = 2 - t.$$

R: $\alpha = 3t^2 + \dfrac{1}{2};\quad \beta = 4t^3 + 2.$

12 Determinar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la curva

$$x = 2t^2, \qquad y = \frac{1}{3}t^3.$$

R: $\alpha = -t^2(2 + t^2);\quad \beta = \dfrac{13}{3}t^3 + 16t.$

13 Determinar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la curva

$$x = \operatorname{sen} t, \qquad y = t.$$

R: $\alpha = -2\cos t\ \operatorname{cotg} t;\quad \beta = t + \operatorname{cotg} t\,(1 + \cos^2 t).$

14. Determinar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la hipérbola:

$$x = \sec t, \qquad y = \operatorname{tg} t.$$

R: $\alpha = 2 \sec^3 t$; $\beta = -2 \operatorname{tg}^3 t$.

15. Determinar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la elipse:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \operatorname{sen} t. \end{cases}$$

R: $\alpha = \dfrac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t$;

$\beta = \dfrac{b^2 - a^2}{b} \operatorname{sen}^3 t$.

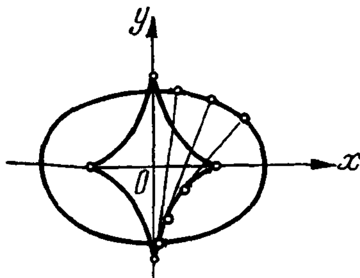


Fig. XII-21.

16. Determinar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la astroide

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \operatorname{sen}^3 t. \end{cases}$$

R· $\alpha = a \cos t\,(3 - 2 \cos^2 t)$, $\beta = a \operatorname{sen} t\,(3 - 2 \operatorname{sen}^2 t)$.

17. Dada una curva en coordenadas polares $\varrho = \varrho(\vartheta)$ determinar las ecuaciones paramétricas de la evoluta.

Solución. Recordando que la pendiente de una curva es $\varphi = \operatorname{arc\,tg} y'$ resulta

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{y''}{1 + y'^2} \quad \text{y} \quad \frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\varphi}{dx}\frac{dx}{dy} = \frac{y''}{(1 + y'^2)\,y'}.$$

Reemplazando en las ecuaciones paramétricas de la evoluta, se tiene:

$$\alpha = x - \frac{dy}{d\varphi}, \quad \beta = y + \frac{dx}{d\varphi}$$

y como las coordenadas polares y cartesianas están vinculadas por las relaciones:

$$x = \varrho \cos \vartheta, \qquad y = \varrho \operatorname{sen} \vartheta,$$

resulta

$$\alpha = \varrho \cos \vartheta - \frac{(\varrho \operatorname{sen} \vartheta)'}{\varphi'}, \quad \beta = \varrho \operatorname{sen} \vartheta + \frac{(\varrho \cos \vartheta)'}{\varphi'}.$$

$\left[\text{Recuérdese que } \varphi = \vartheta + \psi = \vartheta + \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\varrho'}{\varrho}\right]$.

18. Determinar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la lemniscata

$$\varrho^2 = a^2 \cos 2\vartheta.$$

R: $\alpha = \dfrac{2a^2}{3\varrho} \cos^3 \vartheta$, $\beta = -\dfrac{2a^3}{3\varrho} \operatorname{sen}^3 \vartheta$.

12. VOLUMEN DE UN SOLIDO

Consideremos un cuerpo tridimensional referido a una terna cartesiana (x, y, z). La determinación de su volumen se hace mediante integrales dobles o triples, que no se consideran en este tomo, pero en algunos casos particulares se podrá calcular mediante integrales simples

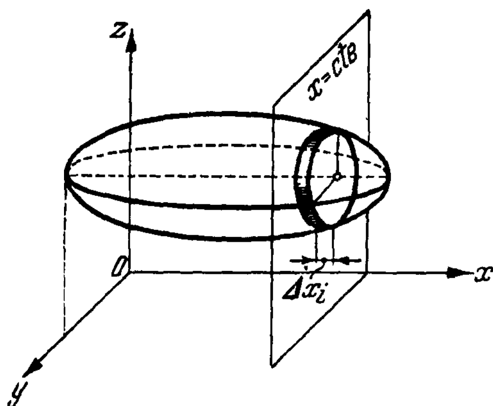


FIG. XII-22

Tal es lo que ocurre cuando la sección del cuerpo con el plano x_i = constante, es una figura cuya área $\varphi(x_i)$ se puede determinar como función de x. Dividimos entonces el intervalo (x_0, x_n) en partes iguales o desiguales de amplitud Δx_i. Si se multiplica el área $\varphi(x_i)$ por Δx_i, se obtiene el volumen de un cilindro elemental como el dibujado en la figura; sumando todos estos volúmenes elementales y pasando al límite se obtiene como expresión del volumen total una integral definida:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\, \Delta x_i = \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x)\, dx.$$

Fórmulas análogas se obtienen considerando las secciones con los planos $y =$ *constante*, o $z =$ *constante*.

EJEMPLO:

Calcular el volumen del elipsoide de semiejes a, b, c.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Cortando con el plano $x =$ constante, resulta como sección la elipse

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2},$$

que podemos escribir

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1.$$

Los semiejes son $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, $c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$.

Como ya se ha visto en la página 372 el área de esta elipse se obtiene multiplicando los semiejes por π. Luego es

$$\varphi(x) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

y el volumen resulta

$$V = \pi bc\int_{-a}^{+a}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx,$$

debiendo ser los límites de integración los valores $-a$ y $+a$ pues sólo entre ellos existen valores reales de $\varphi(x)$. Se tiene entonces:

$$V = \pi bc\left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_{-a}^{+a} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

En particular, si $a = b = c = r$ se obtiene el volumen de la esfera $\frac{4}{3}\pi r^3$.

EJERCICIOS:

1. Calcular el volumen del paraboloide elíptico

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = x$$

para x variando de 0 a h.

R: $\frac{1}{2}\pi bch^2$.

Calcular el volumen determinado por las superficies siguientes y los planos indicados:

2. $z = x^2 + 4y^2$; $z = 1$. R: $\frac{1}{4}\pi$.

3 $4x^2 + 9z^2 + y = 0$, $y = -1$. R: $\frac{1}{12}\pi$.

4. $25y^2 + 9z^2 = 1 + x^2$; $x = 0$, $x = 2$ R: $\frac{14}{45}\pi$.

5 $z^2 = x^2 + 9y^2$; $z = -1$. R: $\frac{1}{9}\pi$.

6 Calcular el volumen del sólido limitado por el hiperboloide de una hoja

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1$$

y los planos $x = 0$, $x = a$.

R: $\frac{4}{3}\pi abc$.

7 Calcular el volumen del sólido determinado por el hiperboloide de dos hojas

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$$

y el plano $x = 2a$.

R: $\frac{4}{3}\pi abc$.

13. VOLUMEN DE UN SOLIDO DE REVOLUCION

Si consideramos un arco AB correspondiente a una función $y = f(x)$, definida en un intervalo (a, b) y suponemos que esta curva gira alrededor del eje de las x, será fácil determinar el volumen del sólido de revolución así obtenido.

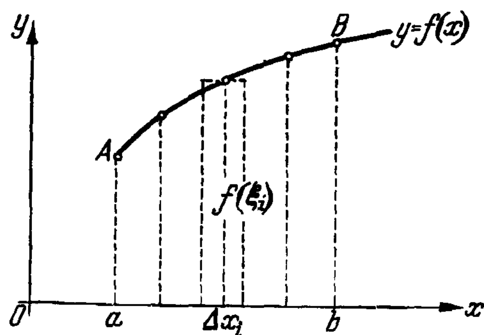


FIG. XII-23.

Dividiendo el intervalo (a, b) en n partes y considerando en cada uno de los intervalos así limitados un punto ξ_i, quedará determinado el volumen elemental del cilindro engendrado al girar el rectángulo de base Δx_i y altura $f(\xi_i)$:

$$\pi f(\xi_i)^2 \Delta x_i .$$

Un valor aproximado del volumen total será:

$$\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)^2 \Delta x_i$$

y el límite de esta suma, si existe, cuando $n \to \infty$ y cada intervalo parcial tiende a cero, es por definición el volumen del sólido de revolución, que se podrá escribir

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

EJEMPLOS·

1°) Calcular el volumen engendrado por un arco de sinusoide

$$y = \operatorname{sen} x$$

para x comprendido entre 0 y π

Es $V = \pi \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{1}{2}\pi \Big[x - \operatorname{sen} x \cdot \cos x \Big]_0^\pi = \frac{1}{2}\pi^2.$

2°) Calcular el volumen engendrado por un arco completo de cicloide al girar alrededor del eje x.

Siendo

$$x = r(t - \operatorname{sen} t), \qquad y = r(1 - \cos t) \qquad \text{es}$$

$$y^2 = r^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t); \qquad dx = r(1 - \cos t)dt$$

y se tiene

$$V = \pi r^3 \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 t - 2\cos t)(1 - \cos t)dt =$$

$$= \pi r^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)dt =$$

$$= \pi r^3 \left[t - 3\,\text{sen}\, t + \frac{3}{2}(t + \text{sen}\, t\,\cos t) - \text{sen}\, t + \frac{1}{3}\text{sen}^3 t \right]_0^{2\pi} = 5\pi^2 r^3.$$

3°) **Calcular el volumen del toro**

El toro es un cuerpo que se obtiene mediante la rotación de un círculo alrededor de un eje que no lo atraviesa. Si el centro O_1 del círculo está sobre el eje de las ordenadas a una distancia $a > r$, la ecuación de la curva será

$$x^2 + (y - a)^2 = r^2.$$

Resulta entonces

$$(y - a) = \pm \sqrt{r^2 - x^2}.$$

A cada valor de x corresponden 2 valores de y:

$$y_1 = a + \sqrt{r^2 - x^2};$$

$$y_2 = a - \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Restando los volúmenes de los cuerpos descriptos por estas 2 semicircunferencias, obtendremos el volumen del toro:

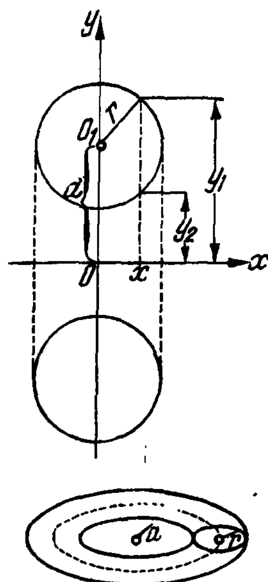


Fig. XII-24.

$$V = \pi \int_{-r}^{+r} y_1^2\, dx - \pi \int_{-r}^{+r} y_2^2\, dx =$$

$$= \pi \int_{-r}^{+r} 4a\sqrt{r^2 - x^2}\, dx =$$

$$= 2\pi a \left[x\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \,\text{arc sen}\, \frac{x}{r} \right]_{-r}^{+r} = 2\pi^2 a r^2.$$

Podemos escribir

$$V = (\pi r^2) \cdot (2\pi a)$$

y resulta que el volumen de un toro es igual al producto del área del círculo generador por la longitud de la circunferencia descripta por su centro O_1 en su rotación alrededor del eje. Este es un caso particular de un teorema de Guldin (o de Papus) que luego veremos en la página 485.

Evidentemente si se considera que la curva gira alrededor del eje y, la fórmula para calcular el volumen engendrado en la rotación será:

$$V = \int_c^d g(y)^2\, dy,$$

donde $g(y)$ es la ecuación de la curva y c y d los valores extremos sobre el eje de las ordenadas.

Si la rotación se efectúa alrededor de una recta cualquiera habrá que calcular la distancia de un punto variable de la curva a la recta eje para hallar los volúmenes elementales y luego proceder a la integración.

EJEMPLO:

Calcular el volumen engendrado por la parábola

$$y = 2 + 4x - x^2$$

al girar alrededor de la recta $y = 2$.

Siendo $(y - 2)$ la distancia de un punto (x, y) de la parábola a la recta $y = 2$, resulta:

$$V = \pi \int_0^4 (y-2)^2\, dx = \pi \int_0^4 (4x - x^2)^2\, dx = \pi \int_0^4 (16x^2 - 8x^3 + x^4)\, dx = \frac{512}{15}\pi.$$

EJERCICIOS:

1. Verificar que el volumen del cono truncado generado por la recta

$$y = x + 1$$

al girar alrededor del eje x y limitado por las ordenadas de $x = 1$, $x = 4$ es 39π.

2. Calcular el volumen de la esfera generada por la revolución del círculo

$$x^2 + y^2 = r^2$$

alrededor de un diámetro.

R: $\frac{4}{3}\pi r^3$.

3. Verificar que el volumen generado por la hipérbola

$$x^2 - y^2 = a^2$$

al girar alrededor del eje x desde $x = 0$ a $x = a$, es igual al volumen de una esfera de radio a.

4. Calcular el volumen engendrado por una onda de la curva

$$y = \operatorname{sen} 2x$$

al girar alrededor del eje x.

R: $\frac{1}{4}\pi^2$.

5. Verificar que el volumen generado por la revolución de una semionda de la curva

$$y = b \operatorname{sen} \frac{x}{a}$$

alrededor del eje x es igual a la mitad del volumen del cilindro circunscripto.

6 Calcular el volumen engendrado por el área limitada por la curva

$$y = \sec \frac{1}{2} \pi x$$

el eje x y las rectas $x = \pm \frac{1}{2}$, al girar alrededor del eje x.

R: 4.

7 Calcular el volumen engendrado por la parábola cúbica

$$y = x^3$$

al girar alrededor de los ejes, entre $x = 0$ y $x = 2$.

R: $V_x = \frac{128}{7}\pi$; $V_y = \frac{96}{5}\pi$.

8. Dado el segmento esférico de altura h perteneciente a la esfera de radio r, hallar por integración que su volumen es $\frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$.

9. Calcular el volumen engendrado por la parábola

$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant a,$$

al girar alrededor del eje x.

R: $\frac{1}{15}\pi a^3$.

10. Determinar el volumen engendrado por la astroide

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

al girar alrededor del eje x. Verifíquese calculando el volumen generado al girar la curva alrededor del eje y.

R: $\frac{32}{105}\pi a^3$.

11. Calcular el volumen generado por la revolución alrededor del eje x, del área limitada por las curvas

$$y = e^{-x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2.$$

R: $\frac{1}{2}\pi(1 - e^{-4})$.

Hallar el volumen generado por la revolución alrededor del eje x de las áreas limitadas por:

12. $y = xe^x$, $y = 0$, $x = 1$. R: $\frac{1}{4}(e^2 - 1)$.

13. $y^2(2 - x) = x^3$, $y = 0$, $x = 1$. R: $\frac{16}{3} - 8 \ln 2$.

14. $y^2 = (1 - x)^3$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$. R: 4π.

15. $(x - 2)y = 4$, $y = 0$, $x = 4$, $x = 6$. R. 4π.

16. Calcular el volumen engendrado por la catenaria

$$y = \frac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

al girar alrededor del eje x en el intervalo $(0, a)$.

R: $\frac{1}{8}\pi a^3(e^2 - e^{-2} + 4)$.

Hallar el volumen generado por la revolución, alrededor del eje y, de las áreas limitadas por:

17. $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$. R: 2π.

18. $x^2 + 4y^2 = 1$. R: $\frac{2}{3}\pi$.

19. $x^2 = 2 - y$, $y = 0$. R $\frac{8}{3}\pi$.

20. Calcular el volumen engendrado por la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ al girar alrededor del eje y.

R: $\frac{4}{3}\pi a^2 b$.

21. Idem alrededor del eje x.

R: $\frac{4}{3}\pi ab^2$.

22. Demostrar que el volumen del paraboloide de revolución generado por la parábola $y^2 = ax$, al girar alrededor de su eje entre el origen y el punto (x_0, y_0) es la mitad del volumen del cilindro circunscripto. Análogamente, demuéstrese que al girar alrededor del eje y genera un volumen igual a $\frac{1}{5}$ del volumen del cilindro de altura y_0 y radio de la base x_0.

23. Si la hipérbola

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

gira alrededor del eje x, el volumen comprendido entre las superficies así generadas, el cono generado por las asíntotas y dos planos perpendiculares al eje, a distancia h entre sí, es igual al volumen del cilindro circular de altura h y radio b.

24. Verificar que el volumen generado por la revolución de la superficie limitada

por la curva $ay^2 = x^3$ y la cuerda $x = h$, al girar alrededor del eje x, es $\frac{1}{4}$ del volumen de un cilindro de altura h y la misma base.

25 Verificar que el volumen generado por la revolución alrededor del eje x del área limitada por el eje y y la parábola

$$cy = (x - a)(x - b)$$

es $\frac{1}{30c^2}\pi(a - b)^5$.

26. Si un segmento parabólico gira alrededor del eje y, demostrar que el volumen generado es $\frac{8}{15}$ veces el del cilindro circunscripto

27 Calcular el volumen engendrado por la revolución alrededor del eje y del área limitada por el par de curvas

$$y^2 = x^3, \qquad y^2 = 2 - x.$$

Solución: Las curvas se encuentran en $A(1, 1)$ y $B(1, -1)$. Por razones de simetría será suficiente duplicar el volumen engendrado por el área comprendida en el primer cuadrante al girar alrededor del eje y.

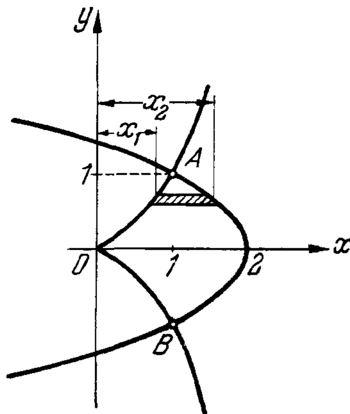


Fig XII-25

Siendo

$$\Delta V = \pi(x_2^2 - x_1^2)\Delta y = \pi\left[(2 - y^2)^2 - y^{\frac{4}{3}}\right]\Delta y,$$

será

$$V = 2\pi\int_0^1 \left(4 - 4y^2 + y^4 - y^{\frac{4}{3}}\right)dy = \frac{512}{105}\pi.$$

Calcular el volumen engendrado por la revolución alrededor del eje y del área limitada por los siguientes pares de curvas:

28. $\begin{cases} xy = 4, \\ x + y = 5. \end{cases}$ R. 9π

29. $\begin{cases} y^3 = x, \\ y = x^2. \end{cases}$ R: $\frac{5}{14}\pi$.

30. $\begin{cases} 3x = 4y - y^2, \\ y^3 = 27x. \end{cases}$ R: $\frac{10}{7}\pi$

31. $\begin{cases} x = 5, \\ xy = y^2 + 4. \end{cases}$ R: 8π.

32. El área limitada por las parábolas

$$y^2 = 4x,$$

$$y^2 = 5 - x,$$

gira alrededor de los ejes de coordenadas. Calcular los volúmenes que engendra.

R 10π; $\frac{176}{3}\pi$.

33 Calcular el volumen generado por la hipocicloide (astroide)

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\,\text{sen}^3\, t, \end{cases}$$

al girar alrededor del eje x Compárese el resultado con el obtenido en el ejercicio 10.

34 Calcular el volumen engendrado por un arco de la cicloide

$$\begin{cases} x = a(t - \text{sen}\, t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$$

al girar alrededor del eje y.

R $6\pi^3 a^3$.

35 Dada la curva

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = 4t - t^3, \end{cases}$$

calcular el área del bucle y el volumen generado por dicha área al girar alrededor del eje x

R· $A = \frac{256}{15}$, $V = \frac{64}{3}\pi$.

36 Calcular el volumen generado por la curva

$$y^2 = x^3$$

al girar alrededor de la recta $x = 4$

R: $\frac{2048}{35}\pi$.

37 Calcular el volumen generado por la parábola

$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 1$$

al girar alrededor de la recta $x + y = 1$

Solución: Siendo la distancia d de un punto (ξ, η) de la parábola $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 1$,

a la recta $x + y - 1 = 0$, igual a $d = \dfrac{\xi + \eta - 1}{\sqrt{2}}$ y la altura del cilindro elemental $\sqrt{2}\,d\xi$, resulta:

$$V = \pi \int_0^1 d^2 \sqrt{2}\,d\xi = \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi \int_0^1 (\xi + \eta - 1)^2 d\xi =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^1 \xi^2 + (1 - 2\sqrt{\xi} + \xi)^2 + 1 + 2\xi(1 - \sqrt{\xi})^2 - 2\xi - 2(1 - \sqrt{\xi})^2 d\xi =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\pi}{30}.$$

38. Calcular el volumen engendrado por la hipérbola

$$xy = 4$$

al girar alrededor de la recta $x + y = 5$.

R: 2,28.

39 La ecuación de la parábola representada en la figura es

$$y = x^2.$$

Calcular el volumen generado cuando el área

a) *OAB* gira alrededor del eje x; R: $\frac{32}{5}\pi$.

b) *OAB* „ „ de *AB*; R: $\frac{8}{3}\pi$.

c) *OAB* „ „ „ *CA*; R: $\frac{224}{15}\pi$.

d) *OAB* „ „ del eje y; R: 8π.

e) *OAC* „ „ „ „ „ R: 8π.

f) *OAC* „ „ de *CA*; R: $\frac{256}{15}\pi$.

g) *OAC* „ „ „ *AB*; R: $\frac{40}{3}\pi$.

h) *OAC* „ „ del eje x, R: $\frac{128}{5}\pi$.

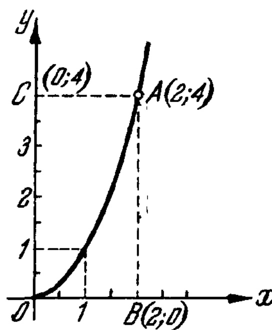


FIG. XII-26.

40 Calcular el volumen engendrado por la cardioide

$$\varrho = 2(1 - \cos\vartheta)$$

al girar alrededor del eje polar.

Solución. Por ser $x = \varrho\cos\vartheta$, $y = \varrho\,\text{sen}\,\vartheta$ resulta:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_\alpha^\beta \varrho^2\,\text{sen}^2\vartheta\,(\varrho'\cos\vartheta - \varrho\,\text{sen}\vartheta)\,d\vartheta.$$

En nuestro caso

$$V = \pi \int_{\pi}^{0} 4(1 - \cos\vartheta)^2 \operatorname{sen}^2\vartheta\,(4 \operatorname{sen}\vartheta\ \cos\vartheta - 2\operatorname{sen}\vartheta)\,d\vartheta =$$

$$= 8\pi \int_{\pi}^{0} (1 - 2\cos\vartheta + \cos^2\vartheta)\ \operatorname{sen}^3\vartheta\,(2\cos\vartheta - 1)\,d\vartheta =$$

$$= 8\pi \int_{\pi}^{0} (4\cos\vartheta - 1 - 5\cos^2\vartheta + 2\cos^3\vartheta)\ (1 - \cos^2\vartheta)\operatorname{sen}\vartheta\,d\vartheta =$$

$$= 8\pi \int_{\pi}^{0} (1 - 4\cos\vartheta + 4\cos^2\vartheta + 2\cos^3\vartheta - 5\cos^4\vartheta + 2\cos^5\vartheta)\ d(\cos\vartheta) =$$

$$= 8\pi\left[\cos\vartheta - 2\cos^2\vartheta + \frac{4}{3}\cos^3\vartheta + \frac{1}{2}\cos^4\vartheta - \cos^5\vartheta + \frac{1}{3}\cos^6\vartheta\right]_{\pi}^{0} = \frac{64}{3}\pi.$$

41. Calcular el volumen generado por la revolución alrededor del eje x de la curva

$$y = e^{-x}$$

desde $x = 0$ hasta $x = \infty$.

R: $\frac{1}{2}\pi$

42. Calcular el volumen engendrado por la curva

$$y = xe^{-x}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \infty,$$

al girar alrededor del eje x.

R: $\frac{1}{4}$

43. Calcular el volumen generado por la revolución alrededor del eje x de la curva $y^4(1 - x) = 1$ desde el origen hasta $x = 1$.
R: 2π.

14. AREA DE UN SOLIDO DE REVOLUCION

Sea AB una curva plana, rectificable, correspondiente a una función $y = f(x)$, en un intervalo (a, b) y consideremos el sólido engendrado por la revolución de esta curva alrededor del eje de las abscisas.

Siendo la curva rectificable puede tomarse como variable el arco s, contado a partir de un origen arbitrario fijo. Así, las coordenadas x e y de un punto cualquiera serán funciones continuas de s.

El área de la superficie engendrada por la porción de curva comprendida entre los puntos extremos de abscisas a y b es, por definición, el límite del área engendrada por la revolución de un polígono inscripto en la curva, cuando tienden a cero las longitudes de los lados del polígono.

Llamaremos s_1 y s_{n+1} los valores del arco s correspondientes a los puntos extremos del arco de curva considerado y señalaremos sobre dicho arco una sucesión de puntos en los cuales s toma los valores $s_2, s_3, \ldots, s_n$.

Sean x_i e y_i las coordenadas del punto de la curva correspondiente al valor s_i del arco.

Inscribamos en la curva el polígono cuyos vértices sean los puntos antes señalados y sea c_i el segmento que une los puntos de coordenadas (x_i, y_i) y (x_{i+1}, y_{i+1}). Este segmento, al girar alrededor del eje x, engendra la superficie lateral de un tronco de cono, cuya área está dada por

$$2\pi \frac{y_i + y_{i+1}}{2} c_i. \qquad [1]$$

Evidentemente, el área engendrada por el polígono entero se obtendrá sumando todas las expresiones análogas a la [1], correspondientes a todos los c_i; se tendrá, pues,

$$2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} c_i,$$

expresión que, por suma y resta de un mismo valor, puede escribirse

$$2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} (s_{i+1} - s_i) - 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} [(s_{i+1} - s_i) - c_i] \qquad [2]$$

Llamando M al máximo valor de y en el intervalo considerado, y teniendo en cuenta que c_i es la cuerda del arco $s_{i+1} - s_i$ y que, por lo tanto, los corchetes que figuran en la segunda sumatoria son siempre positivos, puede asegurarse que esta segunda sumatoria será menor que

$$2\pi M \sum_{i=1}^{n} [(s_i + i - s_i) - c_i] = 2\pi M \left[s_{n+1} - s_1 - \sum_{i=1}^{n} c_i\right].$$

Como el arco $s_{n+1} - s_1$ es, por definición, el límite del perímetro, $\sum_{i=1}^{n} c_i$, del polígono inscripto, cuando c_i tiende a cero esta expresión también tenderá a cero. Por tanto, el área de la superficie de revolución que buscamos calcular será igual al límite de la primera sumatoria de [2].

Siendo $\frac{y_i + y_{i+1}}{2}$ un valor medio de y en el intervalo (s_i, s_{i+1}), en el límite tendremos que el área A será

$$A = 2\pi \int_{s_1}^{s_{n+1}} y \, ds.$$

Según que la curva esté expresada en coordenadas cartesianas, paramétricas o polares se tendrán las siguientes expresiones del área:

$$\text{(I)} \qquad A = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

$$\text{(II)} \qquad A = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} y\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt.$$

$$\text{(III)} \qquad A = 2\pi \int_\alpha^\beta \varrho \operatorname{sen}\vartheta \sqrt{\varrho^2+\varrho'^2}\,d\vartheta.$$

EJEMPLOS:

1°) Calcular el área de la superficie de revolución engendrada por la curva

$$4y = x^2 - 2\ln x, \quad \text{para} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2,$$

al girar alrededor del eje x.

Como es $y' = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$ resulta $1 + y'^2 = \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$, es decir

$$ds = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)dx.$$

Se tiene entonces

$$A = 2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int_1^2 (x^2 - 2\ln x)\left(x+\frac{1}{x}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\pi\left[\frac{1}{4}x^4 + x^2 - x^2\ln x - (\ln x)^2\right]_1^2 \sim \frac{3}{4}\pi.$$

2°) Calcular el área de la superficie generada por la rotación alrededor del eje x de la cardioide:

$$\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t), \\ y = a(2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t). \end{cases}$$

Resulta $ds^2 = dx^2 + dy^2 = a^2(8 - 8\cos t) = 16a^2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}t$ y el área será

$$A = 2\pi\int_0^\pi a(2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t)\, 4a \operatorname{sen}\frac{1}{2}t\,dt =$$

$$= 8\pi a^2\int_0^\pi \left[4\operatorname{sen}\frac{1}{2}t\,\cos\frac{1}{2}t - 4\operatorname{sen}\frac{1}{2}t\,\cos\frac{1}{2}t\left(\cos^2\frac{1}{2}t - \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}t\right)\right]\operatorname{sen}\frac{1}{2}t\,dt =$$

$$= 64\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\operatorname{sen}^2 t\,\cos t - \operatorname{sen}^2 t\,\cos^3 t + \operatorname{sen}^4 t\,\cos t\right]dt = \frac{128}{5}\pi a^2.$$

3°) Calcular el área de la superficie generada por la rotación de la curva

$$\varrho = 4\cos\vartheta,$$

al girar alrededor del eje x, al variar ϑ de 0 a $\frac{1}{2}\pi$.

Como es $\varrho'^2 + \varrho^2 = 4^2$ es $ds = 4d\vartheta$ y el área resulta

$$A = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varrho\operatorname{sen}\vartheta\sqrt{\varrho^2+\varrho'^2}\,d\vartheta = 32\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\vartheta\,\operatorname{sen}\vartheta\,d\vartheta$$

$$= 8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen} 2\vartheta\,d2\vartheta = 16\pi.$$

Es fácil verificar que el resultado es correcto pues la curva es una semicircunferencia de radio 2 y el área engendrada será una esfera del mismo radio.

EJERCICIOS:

1. Calcular la superficie del cono generado por la rotación alrededor del eje x de la recta $y = 3x$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

   R: $48\sqrt{10}\pi$.

2. Idem alrededor del eje y.

   R: $16\sqrt{10}\pi$.

3. Calcular el área lateral del tronco de cono generado por la rotación alrededor del eje x de la recta $3y = -2x + 6$ desde $x = 0$ hasta $x = 4$.

   R: $\frac{20}{9}\sqrt{13}\pi$.

4. Calcular la superficie del cono generado por rotación alrededor del eje x de la recta que une el origen con el punto (x_1, y_1).

   R. $\pi y_1 \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

5. Idem alrededor del eje y.

   R: $\pi x_1 \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

   [Nótese que si m es la pendiente de la recta, las áreas verifican la relación: $\frac{A_x}{A_y} - m$].

6. Calcular por integración la superficie de la esfera generada por la rotación del círculo de radio r alrededor de un diámetro.

   R: $4\pi r^2$.

7. Calcular el área de la esfera generada por la revolución alrededor de un diámetro del círculo de radio $r = 3$.

   R: 36π.

8. Calcular el área de la superficie generada por la revolución alrededor del eje x del arco de la curva

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$$

   desde $x = 1$ hasta $x = 3$.

   R: $\frac{208}{9}\pi$.

9. Calcular el área de la superficie generada por la rotación alrededor del eje x del arco de la curva $y = x^2$ comprendido entre $x = 0$ y $x = 3$.

   R: $\frac{1}{3}\pi(37\sqrt{37} - 1)$.

10. Determinar el área de la superficie de revolución generada por la curva $y^2 = x$ al girar alrededor del eje x en el intervalo $(0, 4)$.

    R: $\frac{62}{3}\pi$.

11. Calcular el área de la superficie generada por la rotación de la parábola $y^2 = 9 - x$ al girar el arco correspondiente al primer cuadrante, alrededor del eje x.

R: 128,17.

12 Calcular el área de la superficie generada por la rotación alrededor del eje y de la curva $8x = y^3$ desde $y = 0$ hasta $y = 2$.

R $\frac{\pi}{108}(17\sqrt{34} - 32)$

13 Determinar el área de la superficie de revolución generada por la curva $y = x^3$ al girar alrededor de los ejes en el intervalo (0, 1).

R: $A_x = 1{,}134\,\pi$, $A_y = 3{,}4\,\pi$.

14. Calcular el área de la superficie de revolución engendrada por la curva

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

al girar alrededor de los ejes desde el origen hasta $x = 1$.

R. $A_x = \frac{1}{2}\pi(2 + \text{Sh}\,2)$, $A_y = 2\pi(1 - e^{-1})$.

15 Calcular el área del elipsoide generado por la revolución, alrededor del eje x, de la elipse:

$$x = a\cos t, \qquad y = b \operatorname{sen} t, \qquad [1]$$

con $a > b$

Solución Siendo

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t =$$
$$= \cos^2 t\,(b^2 - a^2) + a^2 = (1 - k^2\cos^2 t)a^2,$$

si es $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$, la mitad del área del cuerpo engendrado resulta:

$$\frac{1}{2}A = 2\pi ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} t\sqrt{1 - k^2\cos^2 t}\,dt =$$

$$= -2\pi ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\cos^2 t}\; d(\cos t) =$$

$$= \frac{ab\pi}{k}\left(k\sqrt{1 - k^2} + \operatorname{arc\,sen} k\right) =$$

$$= \pi\left(b^2 + ab\frac{\operatorname{arc\,sen} k}{k}\right)$$

y el área total será:

$$A = 2\pi\left(b^2 + ab\frac{\operatorname{arc\,sen} k}{k}\right).$$

16. Calcular el área del elipsoide generado por la revolución de la elipse [1] con $a < b$ alrededor del eje x

$\left[\text{Téngase en cuenta que la excentricidad es } k^2 = \frac{b^2 - a^2}{a^2}\right]$

R: $2\pi\left[b^2 + \frac{ab}{k}\ln(k + \sqrt{1 + k^2})\right] = 2\pi\left[b^2 + \frac{ab}{k}\text{Arg Sh } k\right]$.

17 Calcular el área del elipsoide generado por la revolución alrededor del eje x de la elipse

$$12x^2 + 10y^2 = 120.$$

R· $52{,}96\,\pi$

18. Calcular el área del elipsoide de revolución generado por la rotación de la elipse de semiejes a y b alrededor del eje y.

R: $2\pi\left(a^2 + \frac{b^2}{k}\text{Arg Th } k\right) = 2\pi a^2 + \frac{b^2}{k}\pi\ln\frac{1+k}{1-k}$.

19. Calcular el área de la superficie generada por la rotación alrededor del eje x de la curva $y = e^{-x}$ desde $x = 0$ hasta $x = \infty$.

R: $\pi\left[\sqrt{2} + \ln\,(1 + \sqrt{2})\right]$

20. Calcular el área de la superficie de revolución generada por la rotación de la astroide

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

alrededor del eje x.
(Obsérvese que la integral a resolver es impropia y procédase como se indicó en la pág. 395).

R. $\frac{12}{5}\pi a^2$.

21. Calcular el área de la superficie engendrada por la rotación alrededor del eje x de una onda (*bucle*) de la curva

$$8a^2y^2 = a^2x^2 - x^4.$$

R· $\frac{1}{4}\pi a^2$.

22. Calcular el área de las superficies generadas por la rotación alrededor de los ejes de la curva

$$6a^2xy = x^4 + 3a^4$$

desde $x = a$ hasta $x = 2a$.

R: $A_x = \frac{47}{16}\pi a^2$; $A_y = \frac{\pi}{a^2}\left(\frac{15}{4} + \ln 2\right)$

23 Calcular el área de la superficie generada por la rotación alrededor del eje x de una onda de la curva

$$y = \text{sen}\, x.$$

Solución:

$$A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx = 2\pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx =$$

$$= -2\pi \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}\, d(\cos x).$$

Haciendo la sustitución $z = \cos x$ el nuevo intervalo de integración resulta $(1, -1)$ y tenemos:

$$A = -2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1 + z^2}\, dz = -2\pi \left[\frac{1}{2} z\sqrt{1 + z^2} + \frac{1}{2} \operatorname{Arg\,Sh} z\right]_1^{-1} =$$

$$= 2\pi(\sqrt{2} + \operatorname{Arg\,Sh} 1) = 2\pi\left[\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln(3 + 2\sqrt{2})\right] \sim 14{,}4$$

24. Verificar que el área de una zona esférica de radio r es $2\pi rh$.

(Considérese la zona generada por la revolución alrededor del eje x, del arco $y^2 = r^2 - x^2$ desde $x = c$ hasta $x = c + h$).

25 Calcular el área de la superficie generada por el círculo

$$\begin{cases} x = 6 + 4 \operatorname{sen} 2t, \\ y = 4 - 4\cos 2t, \end{cases}$$

al girar alrededor de los ejes coordenados desde $t = 0$ hasta $t = \pi$.

R: $A_x = 64\pi^2$; $A_y = 96\pi^2$.

26. Calcular el área de la superficie generada por la rotación de la cicloide (una onda)

$$\begin{cases} x = r(t - \operatorname{sen} t), \\ y = r(1 - \cos t), \end{cases}$$

alrededor del eje x.

R: $\frac{64}{3}\pi a^2$.

27 El toro se genera por la revolución de un círculo de radio a alrededor de una recta de su plano a distancia b del centro $(b > a)$. Demostrar que su área es $4\pi^2 ab$.

(Hágase girar alrededor del eje y el arco $x = b + a\cos t$; $y = a \operatorname{sen} t$ de $t = 0$ a $t = 2\pi$).

28 Calcular el área de la superficie generada por la astroide

$$\begin{cases} x = \cos^3 x, \\ y = \operatorname{sen}^3 x, \end{cases}$$

al girar el arco comprendido en el primer cuadrante, alrededor del eje x.

R: $\frac{6}{5}\pi$.

29. Idem alrededor del eje y.

R: $\frac{6}{5}\pi$.

30. Calcular el área de la superficie generada por la rotación de la curva

$$\begin{cases} x = 4 + 3t^2, \\ y = 6 - 4t^2, \end{cases}$$

alrededor de los ejes de coordenadas, de $t = 0$ a $t = 1$. Trácese el gráfico y verifíquense geométricamente los resultados.

R $A_x = 40\pi$; $A_y = 55\pi$.

31. Calcular el área de la superficie generada por la rotación, alrededor de cada eje, de la curva

$$\begin{cases} x = e^t \operatorname{sen} t, \\ y = e^t \cos t, \end{cases}$$

desde $t = 0$ hasta $t = \frac{1}{2}\pi$.

R: $A_x = \frac{2\sqrt{2}}{5}\pi(e^\pi - 2)$, $A_y = \frac{2\sqrt{2}}{5}\pi(2e^\pi + 1)$.

32. Calcular el área de la superficie generada por el arco del primer cuadrante de la cardioide $\rho = 1 - \cos\vartheta$, al girar alrededor del eje y.

R: $\frac{8}{5}(3\sqrt{2} - 2)\pi$.

33. Calcular el área de la superficie generada por la lemniscata

$$\rho^2 = \cos 2\vartheta$$

al girar alrededor del eje y y del eje x

R: $A_y = 2\sqrt{2}\pi$, $A_x = 2(2 - \sqrt{2})\pi$.

CAPÍTULO XIII

APLICACIONES FISICAS

En numerosas cuestiones de física se aplican conceptos del cálculo infinitesimal. Tal es lo que ocurre con la velocidad y aceleración de un cuerpo que pueden ser definidos como la derivada primera y segunda, respectivamente, del espacio respecto del tiempo.

Veremos ahora como los momentos de diversos órdenes y los trabajos realizados por las fuerzas se pueden expresar, en ciertos casos, mediante integrales definidas.

Empezaremos por recordar los conceptos de *momentos* en el caso de sistema de puntos, para pasar luego al caso de magnitudes continuas, basándonos siempre en las consideraciones intuitivas en que se funda el técnico al *aplicar* el cálculo integral.

1. MOMENTOS DE UN SISTEMA DE PUNTOS MATERIALES SITUADOS EN UNA RECTA

Consideremos sobre una recta, una serie de puntos A, B, ..., L de abscisas conocidas x_1, x_2, ..., x_n, respecto de un origen O y una unidad dados.

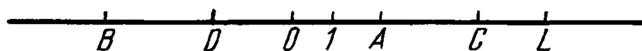


FIG XIII-1.

Supongamos que en cada punto se hallan condensadas masas: m_1, m_2, ..., m_n. Brevemente diremos que los puntos A, B, , L son *puntos materiales*.

Definimos como *momento de primer orden* $M^{(1)}$ o *momento estático* respecto de O a la suma de los productos de las abscisas por las masas correspondientes:

$$M^{(1)} = m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n = \sum_{i=1}^{n} m_ix_i.$$

Análogamente se define el *momento de segundo orden* $M^{(2)}$ o *momento de inercia* respecto de O a la suma de los productos de las masas por los cuadrados de las distancias a O:

$$M^{(2)} = m_1x_1^2 + m_2x_2^2 + \ldots + m_nx_n^2 = \sum_{i=1}^{n} m_ix_i^2$$

y en general *momento de orden* r : $M^{(r)}$ respecto de O, a la suma:

$$M^{(r)} = m_1 x_1^r + m_2 x_2^r + \ldots + m_n x_n^r = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^r.$$

Consideremos ahora la siguiente cuestión. Si se cambia el origen de abscisas, ¿el momento $M^{(1)}$, o sea el momento estático, se anula para algún valor conveniente del nuevo origen?

Llamemos G al nuevo origen y sea x_G su abscisa. Las distancias de los puntos $A, B, \ldots, L$ a G serán: $x_1 - x_G$, $x_2 - x_G$, $\ldots$, $x_n - x_G$ y el momento correspondiente será:

$$M_G^{(1)} = m_1(x_1 - x_G) + m_2(x_2 - x_G) + \ldots + m_n(x_n - x_G) = 0,$$

o sea

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n - x_G(m_1 + m_2 + \ldots + m_n) = 0,$$

y en definitiva

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{M^{(1)}}{M},$$

si se designa con M la suma de las masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

Este valor x_G, que si se adopta como origen anula el correspondiente momento estático, se denomina *centro de masas* o *centro de gravedad* del sistema de masas m_i distribuídas en los puntos de abscisas x_i.

El centro de gravedad G es independiente del origen de coordenadas. En efecto, si adoptamos un nuevo origen O_1 de abscisa x_0 las distancias a O_1 serán las diferencias $(x_i - x_0)$ y el centro de gravedad respecto de O_1 tendrá como abscisa

$$\frac{\sum (x_i - x_0) m_i}{M} = \frac{\sum x_i m_i}{M} - \frac{\sum x_0 m_i}{M} = \frac{M^{(1)}}{M} - x_0 = x_G - x_0$$

y esta es la abscisa de G en el nuevo sistema.

EJERCICIOS

1. En los puntos de abscisas 1, -3, 5, -4 se han colocado respectivamente las masas 7, 5, 2, 1. Calcular los momentos de primero y segundo orden y determinar la abscisa x_G del centro de gravedad.

   R: $M^{(1)} = 7\,(1) + 5\,(-3) + 2\,(5) + 1\,(-4) = -2.$

   $M^{(2)} = 7\,(1) + 5\,(9) + 2\,(25) + 1\,(16) = 118.$

   $$x_G = \frac{M^{(1)}}{M} = \frac{-2}{7+5+2+1} = -\frac{2}{15}.$$

2. ¿Qué masa debería ponerse en el punto $x = -4$, del ejercicio anterior, dejando los otros invariables, para que el origen resultara ser el centro de gravedad?

   R: 0,5.

MOMENTO DE INERCIA MÍNIMO: Puesto que el momento de inercia $M^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2$ está dado por una suma de cantidades positivas, no podrá anularse por un cambio del origen de coordenadas. Tiene sentido en cambio esta pregunta: ¿para qué origen de coordenadas será *mínimo* el valor de $M^{(2)}$?

Llamemos x_0 al nuevo origen de coordenadas. Resulta, considerando que en las sumatorias i varía de 1 a n:

$$M_0^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_0)^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 - 2x_0 x_i + x_0^2) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 - 2x_0 \sum_{i=1}^{n} m_i x_i + x_0^2 \sum_{i=1}^{n} m_i .$$

De acuerdo a las notaciones anteriores resulta:

$M_0^{(2)} = M^{(2)} - 2x_0 M^{(1)} + x_0^2 M.$

Puesto que es $M^{(1)} = M x_G$ se tiene.

$M_0^{(2)} = M^{(2)} - 2x_0 M x_G + x_0^2 M = M^{(2)} + M(x_0^2 - 2x_0 x_G + x_G^2 - x_G^2) =$

$= M^{(2)} + M(x_0 - x_G)^2 - M x_G^2.$

El único término en el que interviene x_0 es el segundo, que al ser un cuadrado es positivo o nulo. El valor mínimo que puede tomar $M_0^{(2)}$ por variación de x_0, es el que anula a ese término, lo cual ocurre precisamente para $x_0 = x_G$. Por consiguiente resulta

El momento de inercia de un sistema de puntos materiales situados sobre una recta es mínimo cuando se adopta como origen el centro de gravedad y su valor es

$$M_G^{(2)} = M^{(2)} - M x_G^2.$$

Podemos escribir esta relación en la forma

$$M^{(2)} = M_G^{(2)} + M x_G^2$$

que expresa el teorema de *Steiner* (también llamado de HUYGHENS)·

El momento de inercia de un sistema de puntos materiales respecto de un punto es igual al momento de inercia baricéntrico más el producto de *la masa total del sistema multiplicada por el cuadrado de la abscisa del centro de gravedad.*

APLICACIONES A LA ESTADÍSTICA: En el cálculo de probabilidades y en estadística se utilizan también los conceptos de momentos en la siguiente forma. Se considera que una variable discreta X (llamada *variable aleatoria*) es capaz de tomar diversos valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con probabilidades $p_1, p_2, \ldots p_n$, respectivamente, de modo que la probabilidad total sea $\sum_{i=1}^{n} p_i = M = 1$

Puede concebirse que en cada punto de abscisa x_i se ha colocado una masa p_i y para este sistema de puntos materiales están definidos los momentos:

$$M^{(1)} = \sum p_i x_i,\; M^{(2)} = \sum p_i x_i^2,\; M^{(3)} = \sum p_i x_i^3,\; M^{(4)} = \sum p_i x_i^4,\; \ldots$$

El momento $M^{(1)}$ que correspondía a la abscisa del centro de gravedad, se denomina *esperanza matemática* $E(X)$ o valor medio $\bar{x}$ de la *variable aleatoria* X y se escribe habitualmente $\bar{x} = E(X) = \sum p_i x_i$.

El momento de segundo orden $M^{(2)}$ es mínimo, de acuerdo a lo visto anteriormente, cuando se toma como origen el centro de gravedad $\bar{x}$. Para este valor mínimo del momento de segundo orden se tiene el valor $M_0^{(2)}$ que se designa como σ^2 y que por lo tanto resulta definido por la relación

$$\sigma^2 = M^{(2)} - (\bar{x})^2 = \sum p_i x_i^2 - (\sum p_i x_i)^2$$

(pues $M = \sum p_i = 1$). El valor σ se denomina *desvío cuadrático medio* o *desviación standard.*

EJEMPLO

Consideremos como variable aleatoria X los puntos que se obtienen al arrojar dos dados.

Cada dado puede presentar los puntos 1, 2, ..., 6 y los dos juntos las sumas 2, 3, ..., 12. Estas sumas no tienen igual probabilidad. Así la suma 7 se puede obtener con cualquiera de estas combinaciones: 1 y 6; 2 y 5; 3 y 4; 4 y 3; 5 y 2; 6 y 1. La probabilidad de la suma 7 es por consiguiente $\frac{6}{36}$.

El cuadro de valores para la variable X es:

$$X \begin{cases} x_i = 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12 \\ p_i = \frac{1}{36}, & \frac{2}{36}, & \frac{3}{36}, & \frac{4}{36}, & \frac{5}{36}, & \frac{6}{36}, & \frac{5}{36}, & \frac{4}{36}, & \frac{3}{36}, & \frac{2}{36}, & \frac{1}{36}. \end{cases}$$

Entonces el valor medio es

$$\bar{x} = \sum p_i x_i = \frac{1}{36}(2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 40 + 36 + 30 + 22 + 12) = 7,$$

$$\sigma^2 = \sum p_i x_i^2 - (\bar{x})^2 \sim 5{,}83$$

y la desviación standard es $\sigma \simeq 2{,}41$.

Se observa en este caso que entre los valores $\bar{x} - 2\sigma$ y $\bar{x} + 2\sigma$ está aproximadamente el 95 % de los casos teóricos que se presentan. Este resultado es de carácter general en las distribuciones llamadas "gaussianas" (ver pág. 61).

2. MOMENTOS DE UN SISTEMA DE PUNTOS MATERIALES SITUADOS EN UN PLANO

Consideremos ahora n puntos materiales A, B, ..., L situados en un plano, cuyas coordenadas en un sistema cartesiano ortogonal sean (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., $(x_n; y_n)$.

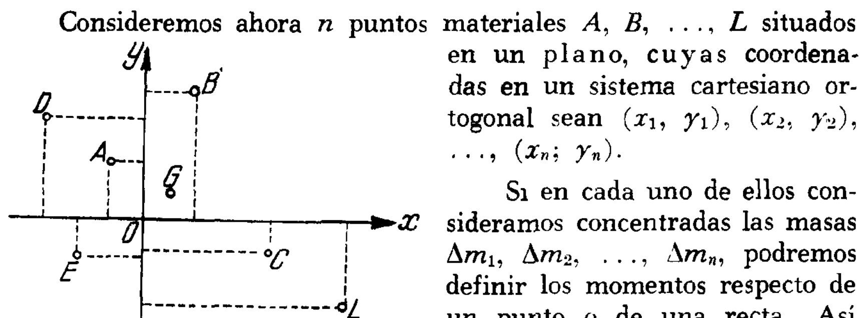


FIG XIII-2.

Si en cada uno de ellos consideramos concentradas las masas Δm_1, Δm_2, ..., Δm_n, podremos definir los momentos respecto de un punto o de una recta. Así resulta:

Momento de primer orden respecto del eje de las abscisas:

$$M_x^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} y_i \, \Delta m_i \, .$$

y en general *momento de orden r respecto del mismo eje:*

$$M_x^{(r)} = \sum_{i=1}^{n} y_i^r \, \Delta m_i \, ,$$

pues y_i es la *distancia* del punto al eje considerado.

Análogamente el *momento de primer orden respecto del eje de las ordenadas* es

$$M_y^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \Delta m_i \, ,$$

y en general el *momento de orden r respecto del eje de las ordenadas:*

$$M_y^{(r)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^r \, \Delta m_i \, .$$

También en este caso es posible determinar un punto G de coordenadas $(x_G; y_G)$ tal que los momentos de primer orden respecto de dos ejes que pasen por él sean nulos. Lo demostraremos utilizando dos ejes paralelos a los primitivos. Resultará entonces

$$M_{y_G}^{(1)} = \sum (x_i - x_G) \, \Delta m_i = \sum x_i \, \Delta m_i - x_G \sum \Delta m_i \, ,$$

$$M_{x_G}^{(1)} = \sum (y_i - y_G) \, \Delta m_i = \sum y_i \, \Delta m_i - y_G \sum \Delta m_i \, .$$

Siendo $M = \sum \Delta m_i$ la masa total, resulta que estos momentos se anulan si es

$$x_G = \frac{\sum x_i \, \Delta m_i}{M} = \frac{M_y^{(1)}}{M} \qquad y_G = \frac{\sum y_i \, \Delta m_i}{M} = \frac{M_x^{(1)}}{M} .$$

El punto G así determinado es independiente del sistema de coordenadas elegido. En el caso de elegir otros ejes paralelos se repite la demostración que hemos hecho para el caso de puntos alineados; si en cambio se hace una rotación de un ángulo φ, habrá que utilizar las conocidas fórmulas de transformación de coordenadas:

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi + y \operatorname{sen} \varphi, \\ y' = -x \operatorname{sen} \varphi + y \cos \varphi. \end{cases}$$

Resulta así que el momento estático o de primer orden de un sistema de puntos respecto de un eje baricéntrico es nulo.

MOMENTOS DE INERCIA: Si se consideran los cuadrados de las distancias a un eje se tienen los momentos axiales de 2° orden o momentos de inercia:

$$M_x^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \,\Delta m_i,$$

$$M_y^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \,\Delta m_i.$$

También se definen los momentos polares de inercia respecto de un punto. En particular, si d_i designa la distancia de cada punto al origen resulta:

$$M_0^{(2)} = \sum d_i^2 \,\Delta m_i = \sum (x_i^2 + y_i^2)\,\Delta m_i$$

en virtud del teorema de Pitágoras, con lo que se obtiene

$$M_0^{(2)} = M_x^{(2)} + M_y^{(2)}$$

El valor k definido por la relación $M_0^{(2)} = Mk^2$ se denomina *girador, radio de giro* o *radio de inercia* del sistema material de masa total M. Este valor k determina el radio de una circunferencia sobre la que habría que distribuir la masa M de un sistema dado para obtener el mismo momento de inercia respecto de O.

Además se definen los *momentos centrífugos* $M_{xy}^{(2)}$ respecto de dos ejes. Para el caso de los ejes coordenados es

$$M_{xy}^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,\Delta m_i.$$

También en el plano se verifica el *teorema de Steiner:* "El momento de inercia de un sistema de puntos materiales respecto de un eje de su plano es igual al momento de inercia respecto de un eje paralelo que pasa por el centro de gravedad G más el producto de la masa total multiplicada por el cuadrado de la distancia d entre los ejes.

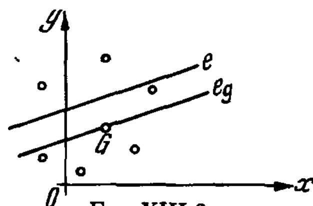


FIG. XIII-3.

$$M_e^{(2)} = M_g^{(2)} + Md^2.$$

La demostración es análoga a la efectuada anteriormente.

El lector demostrará fácilmente que el momento de inercia centrífugo $M_{xy}^{(2)}$ de un sistema de puntos materiales de un plano está vinculado al momento centrífugo $M_{x_G y_G}^{(2)}$ respecto de dos ejes paralelos a los anteriores que pasan por G, por la relación

$$M_{xy}^{(2)} = M_{x_G y_G}^{(2)} + M x_G y_G,$$

donde x_G, y_G son las coordenadas del centro de gravedad y M la masa total del sistema.

3. MOMENTOS DE LINEAS, SUPERFICIES Y VOLUMENES

Para definir los momentos de los cuerpos reales y continuos habrá que dividirlos en n partes, considerar cada una de las masas correspondientes concentradas en sus respectivos centros de gravedad, calcular el momento como si se tratase de puntos materiales aislados y luego pasar al límite cuando $n \to \infty$ Este límite será, de acuerdo a lo ya visto, una integral definida.

Cada una de las masas Δm_i de las porciones en que se ha dividido el cuerpo será igual al producto del volumen Δv_i por la densidad δ, que en lo sucesivo supondremos constante.

Cuando una de las dimensiones predomina sensiblemente sobre las otras dos, la masa Δm_i será el producto Δs_i del arco por la *densidad lineal* y cuando sólo una de las dimensiones sea despreciable la masa será igual al producto $\Delta\sigma_i$ de un elemento de superficie por la *densidad superficial*.

En general para determinar los momentos de los cuerpos continuos es necesario utilizar integrales múltiples que no tratamos en este volumen, pero en muchos casos será posible calcularlos utilizando integrales simples.

MOMENTOS DE UNA LÍNEA· Consideremos un alambre que puede asimilarse a una curva tal como aparece en la figura 4 el arco AB, dado que la longitud predomina sobre el ancho y el espesor.

Si la *densidad lineal* del alambre es δ, la masa de un arco $PQ = \Delta s$ será $\delta \cdot \Delta s$ y los momentos respecto de los ejes de las abscisas y ordenadas serán, respectivamente

$$y\delta \cdot \Delta s; \qquad x\delta \cdot \Delta s.$$

Formando ahora la suma de los productos análogos en una división del arco AB en n partes se tendrá $\delta \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta s_i$ y pasando al límite

cuando $n \to \infty$ y cada intervalo parcial tiende a cero, resultará como momento estático la integral definida

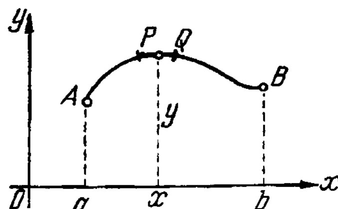


FIG. XIII-4.

$$M_x^{(1)} = \delta \int_a^b y \, ds$$

y en general como momento de orden n:

$$M_x^{(n)} = \delta \int_a^b y^n \, ds.$$

Considerando las distancias al eje Oy se tendrán análogamente los momentos respecto de este eje:

$$M_y^{(1)} = \delta \int_a^b x \, ds,$$

$$M_y^{(n)} = \delta \int_a^b x^n \, ds.$$

CENTRO DE GRAVEDAD DE UN ARCO DE CURVA. Definimos como centro de gravedad de una figura a un punto tal que resulten nulos los momentos estáticos respecto de cualquier eje que pase por él. En particular consideraremos dos ejes paralelos a los ejes coordenados. Si se trata de un arco AB como el de la figura 5. de acuerdo a la definición de momento estático. resulta

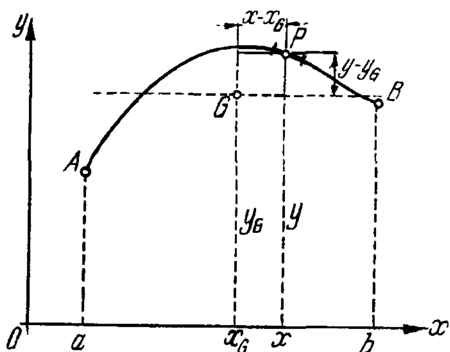


FIG XIII-5.

$$\delta \int_a^b (x - x_G) \, ds = 0 \quad \therefore \quad \int_a^b x \, ds = x_G \int_a^b ds.$$

$$\delta \int_a^b (y - y_G) \, ds = 0 \quad \therefore \quad \int_a^b y \, ds = y_G \int_a^b ds.$$

Por consiguiente, las cordenadas del centro de gravedad de una línea de longitud s están dadas por las relaciones

$$x_G = \frac{\int_a^b x \, ds}{s}; \qquad y_G = \frac{\int_a^b y \, ds}{s}.$$

Multiplicando numeradores y denominadores por δ estas relaciones muestran que el momento de un arco respecto de un eje es igual al momento de toda su masa concentrada en el centro de gravedad.

EJEMPLOS:

1º) Hallar el centro de gravedad de un *arco completo de la cicloide.*

$$\begin{cases} x = r\,(t - \operatorname{sen} t) \\ y = r\,(1 - \cos t) \end{cases} \qquad \text{para } 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Siendo $ds^2 = dx^2 + dy^2 = r^2\,[(1 - \cos t)^2 + \operatorname{sen}^2 t]\,dt^2 =$

$$= r^2[2 - 2\cos t]\,dt^2 = 4r^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}t\,dt^2$$

es

$$ds = 2r \operatorname{sen} \frac{1}{2}t\,dt \quad \text{y} \quad s = \int_0^{2\pi} 2r \operatorname{sen} \frac{1}{2}t\,dt = 4r\left[-\cos\frac{1}{2}t\right]_0^{2\pi} = 8r.$$

Las coordenadas del centro de gravedad son

$$x_G = \frac{1}{8r}\int_0^{2\pi} r(t - \operatorname{sen} t)\,2r \operatorname{sen}\frac{1}{2}t\,dt = \frac{1}{8r}\cdot 8\pi r^2 \quad \text{o sea } x_G = \pi r,$$

$$y_G = \frac{1}{8r}\int_0^{2\pi} r(1 - \cos t)\,2r \operatorname{sen}\frac{1}{2}t\,dt = \frac{1}{8r}\cdot\frac{32}{3}r^2 \quad \text{o sea} \quad y_G = \frac{4}{3}r$$

En realidad, en el caso de la cicloide se evita el cálculo de x_G, puesto que por razones de simetría debía encontrarse en el eje de simetría, que es la recta de abscisa $x = \pi r$.

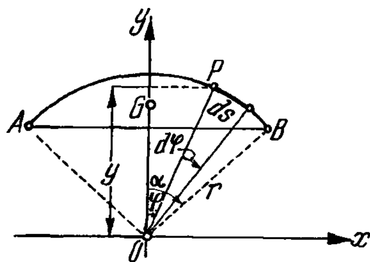


FIG. XIII-6.

2º) Hallar el centro de gravedad de un arco de circunferencia

Sea AB un arco de una circunferencia de radio r y centro O, que supondremos referido a un sistema de ejes cartesianos de origen O y orientado de modo que Oy sea eje de simetría del arco.

Entonces la abscisa del centro de gravedad será nula y para calcular la ordenada habrá que aplicar la fórmula

$$y_G = \frac{\displaystyle\int_a^b y\,ds}{s},$$

siendo s la longitud del arco AB Designemos con φ el ángulo que forma el radio OP con el eje de las ordenadas, siendo P un punto variable entre $A(\varphi = -\alpha)$ y $B(\varphi = +\alpha)$. Resulta entonces

$$y = r\cos\varphi, \qquad ds = r d\varphi, \qquad s = \widehat{AB} = 2\alpha r \ (\alpha \text{ en radianes})$$

$$y_G = \frac{\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} r\cos\varphi\cdot r\,d\varphi}{2\alpha r} = \frac{r^2\left[\operatorname{sen}\varphi\right]_{-\alpha}^{\alpha}}{2\alpha r} = r\,\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$$

Expresado en función de la cuerda $AB = 2r \operatorname{sen} \alpha$ y del arco $AB = 2\alpha r$ resulta

$$y_G = r \frac{\overline{AB}}{\overset{\frown}{AB}}.$$

Es decir: El centro de gravedad de un arco de circunferencia está situado sobre su eje de simetría a una distancia del centro igual al producto del radio por el cociente entre la cuerda y el arco.

Casos particulares:

1°) Si el arco es el cuarto de circunferencia de radio r situado en el primer cuadrante, G debe hallarse sobre la bisectriz de este cuadrante.

Como la cuerda es $r\sqrt{2}$ y el arco $\frac{1}{2}\pi r$, resulta

$$OG = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} r.$$

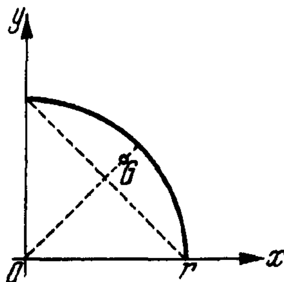


Fig. XIII-7.

Las coordenadas del centro de gravedad son, entonces:

$$x_G = OG \cos 45° = \frac{2}{\pi} r; \qquad y_G = OG \operatorname{sen} 45° = \frac{2}{\pi} r.$$

2°) Si el arco es la semicircunferencia correspondiente a los 2 primeros cuadrantes, será $x_G = 0$; $y_G = \frac{2}{\pi} r$.

Ejercicios:

1 Hallar el centro de gravedad del arco de la parábola

$$y^2 = 4x$$

en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 4$.

R: $x_G = 1{,}64$, $y_G = 2.29$.

2 Determinar el centro de gravedad del arco total de la cardioide

$$\rho = a\,(1 + \cos \vartheta).$$

R: $x_G = \frac{4}{5} a$, $y_G = 0$.

3 Dada la hipocicloide

$$x = \cos^3 t, \qquad y = \operatorname{sen}^3 t,$$

verificar que el centro de gravedad del arco comprendido en el primer cuadrante tiene las coordenadas $x_G = y_G = 0{,}4$.

4 Hallar el centro de gravedad del arco de la curva

$$x = t^2, \qquad y = t - \frac{t^3}{3}$$

para $-1 \leqslant t \leqslant +1$.

R: $x_G = \frac{2}{5}$, $y_G = \frac{13}{24}$.

5. Hallar el centro de gravedad del arco de catenaria

$$y = \operatorname{Ch} x$$

comprendido entre las abscisas $x = 0$ y $x = 1$.

R: $x_G = (\operatorname{Sh} 1 - \operatorname{Ch} 1 + 1) : (\operatorname{Ch} 1 - 1)$; $y_G = \frac{1}{4}(\operatorname{Sh} 2 + 2) : \operatorname{Sh} 1$.

6. Hallar el centro de gravedad del arco de la curva

$$\varrho = e^{\vartheta}$$

desde $\vartheta = 0$ hasta $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$.

R: $x_G = \frac{1}{5}\,\frac{e^{\pi} - 2}{e^{\pi/2} - 1} \sim 1{,}1$; $y_G = \frac{1}{5}\,\frac{2e^{\pi} + 1}{e^{\pi/2} - 1} \sim 2{,}48$.

CENTRO DE GRAVEDAD DE UNA SUPERFICIE: Consideremos un recinto limitado por una curva $y = f(x)$, el eje de las abscisas y las ordenadas correspondientes a $x = a$, $x = b$. Determinaremos las coordenadas x_G, y_G del centro de gravedad G de esta superficie por la condición

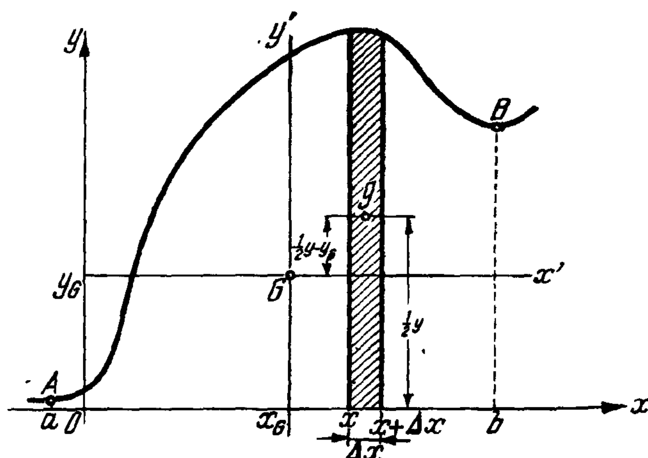


FIG. XIII-8

de que los momentos estáticos respecto de dos ejes que pasen por G sean nulos. Elegimos para ello los ejes Gx', Gy' paralelos a los ejes coordenados. Dividimos el intervalo (a, b) en n partes de amplitud Δx.

Correspondientemente tendremos n fajas de base Δx y de masa $y\,\Delta x\cdot\delta$. Consideremos esta masa concentrada en el centro de gravedad g de la faja, que tiene por coordenadas —aproximadamente— los valores x y $\frac{1}{2}y$.

Los momentos del punto material g respecto de los ejes Gy', Gx' serán respectivamente

$$y\,\Delta x\cdot\delta\cdot(x-x_G); \qquad y\,\Delta x\cdot\delta\cdot(\tfrac{1}{2}y-y_G).$$

Sumando las n expresiones análogas y pasando al límite se tendrá como expresión de los momentos estáticos respecto de los ejes Gy', Gx':

$$\delta\int_a^b y(x-x_G)\,dx; \qquad \delta\int_a^b y(\tfrac{1}{2}y-y_G)\,dx.$$

La anulación de estas integrales implica, respectivamente:

$$\int_a^b x\,y\,dx = x_G\int_a^b y\,dx; \qquad \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx = y_G\int_a^b y\,dx.$$

Como es $\int_a^b y\,dx = A$, siendo A el área de la figura, resultan como coordenadas del centro de gravedad G:

$$x_G = \frac{1}{A}\int_a^b x\,y\,dx; \qquad y_G = \frac{1}{2}\,\frac{1}{A}\int_a^b y^2\,dx.$$

EJEMPLOS:

1°) Calcular el baricentro del cuadrante de círculo de radio r:

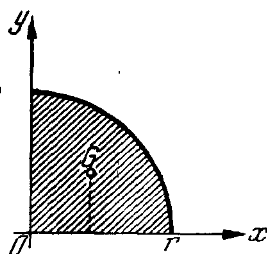


FIG. XIII-9.

Como el área del recinto es $A=\frac{1}{4}\pi r^2$ será suficiente calcular los numeradores de x_G e y_G, teniendo en cuenta que es $x^2+y^2=r^2$, o sea

$$y=\sqrt{r^2-x^2}.$$

Resulta $\displaystyle\int_a^b x\,y\,dx=\int_0^r x\sqrt{r^2-x^2}\,dx=-\frac{1}{3}\Big[(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^r=\frac{1}{3}r^3;$

$$\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx=\frac{1}{2}\int_0^r (r^2-x^2)\,dx=\frac{1}{2}\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r=\frac{1}{3}r^3.$$

Se tiene entonces $x_G=y_G=\dfrac{4r}{3\pi}$.

(Es evidente que por razones de simetría debía ser $x_G=y_G$ y que era suficiente calcular uno sólo de estos valores).

2°) Calcular el centro de gravedad del área limitada por una semionda de la curva

$$y=\operatorname{sen} x.$$

El área encerrada por la curva y el eje de las x es, como se vio en la página 367, $A = 2$; se tiene entonces:

$$x_G = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{2}\Big[\operatorname{sen} x - x \cos x\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\pi,$$

$$y_G = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x \cdot \cos x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{8}\pi.$$

3°) Hallar el baricentro de una superficie triangular.

Consideremos un triángulo de base b y altura h y ubiquemos los ejes coordenados en la forma que lo indica la figura. En base a la semejanza de triángulos resulta en el triángulo TOR:

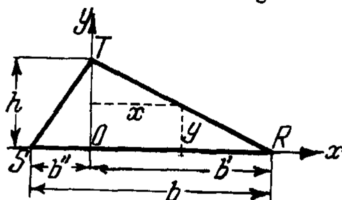


FIG. XIII-10.

$$x = \frac{b'}{h}(h - y).$$

Entonces se tiene:

$$\int_{x_0}^{x_1} y^2\, dx = \int_h^0 y^2 \frac{b'}{h}(-dy) = \frac{b'}{h}\int_0^h y^2\, dy = \frac{b'}{h}\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}b' h^2.$$

El cálculo con la otra parte del triángulo OST da análogamente $\frac{1}{3}b'' h^2$ y el total se obtiene sumando: $\frac{1}{3}bh^2$.

Como es $2A = bh$ resulta:

$$y_G = \frac{\frac{1}{3}bh^2}{bh} = \frac{1}{3}h.$$

Dado que a este resultado se llega partiendo de cualquiera de los lados, se concluye que el centro de gravedad de un triángulo se encuentra en el *punto de intersección de las medianas*, que es el único punto que está situado sobre las paralelas a los lados trazadas a $\frac{1}{3}$ de la altura correspondiente.

Observación: Intuitivamente es evidente que el centro de gravedad de un triángulo debe encontrarse en el punto de intersección de las medianas. Basta trazar una serie de rectángulos inscriptos tal como aparecen en la figura y observar que el centro de gravedad de cada rectángulo está en el centro geométrico. Aplicando en cada uno de ellos un vector proporcional al área, resultará que el punto de aplicación del sistema de vectores paralelos debe encontrarse sobre la mediana.

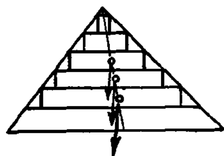


FIG. XIII-11.

CENTRO DE GRAVEDAD DE UNA FIGURA COMPUESTA: Sea determinar el centro de gravedad de la parte rayada de la figura limitada por los

ejes coordenados y la circunferencia de radio r tangente a estos ejes. La zona rayada es la diferencia entre el cuadrado de lado r y el cuarto de círculo. Conocemos los centros de gravedad G_1 y G_2 de estas dos superficies. Por razones de simetría las dos coordenadas buscadas deben ser iguales. G_1 tiene coordenadas

$$x_{G_1} = y_{G_1} = \frac{1}{2}r$$

y el área de la superficie del cuadrado es $A_1 = r^2$.

G_2 tiene por coordenadas de acuerdo a lo visto al calcular el cuadrante del círculo

$$x_{G_2} = y_{G_2} = r\left(1 - \frac{4}{3\pi}\right).$$

El área correspondiente es $A_2 = \frac{1}{4}\pi r^2$.

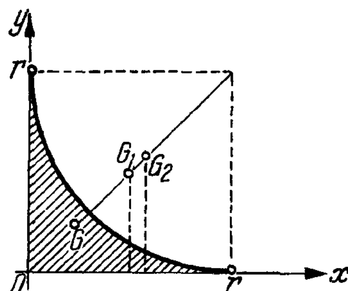


FIG. XIII-12.

La superficie rayada es $r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2 = r^2(1 - \frac{1}{4}\pi)$ y de acuerdo a la definición de centro de gravedad es

$$x_G r^2\left(1 - \frac{1}{4}\pi\right) = x_{G_1} r^2 - x_{G_2}\frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{2}r^3 - \frac{3\pi - 4}{12}r^3 = \frac{10 - 3\pi}{12}r^3$$

es decir

$$x_G = y_G = \frac{10 - 3\pi}{3(4 - \pi)}r \sim 0{,}223\, r.$$

EJERCICIOS:

1. **Hallar el centro de gravedad del área limitada por la parábola**

$$y = x^2,$$

el eje de las x y la recta $x = a$.

R: $x_G = \frac{3}{4}a$; $y_G = \frac{3}{10}a^2$.

2. **Idem del área encerrada por la curva**

$$y = \cos x,$$

para $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ y el eje de las abscisas.

R: $x_G = \frac{1}{2}\pi - 1$; $y_G = \frac{1}{8}\pi$.

3. **Idem del área limitada por el eje y y la curva.**

$$x = 2y - y^2.$$

R. $x_G = \frac{2}{5}$; $y_G = 1$.

4. Idem del triángulo cuyos lados son los ejes y la recta

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

R: $x_G = \frac{1}{3}a$; $y_G = \frac{1}{3}b$.

Hallar el baricentro de las áreas limitadas por las siguientes curvas.

5. $y^2 = 4x$, $x = 5$. R. $x_G = 3$, $y_G = 0$

6. $y = x^3$, $x = 2$, $y = 0$. R: $x_G = \frac{8}{5}$, $y_G = \frac{16}{7}$.

7. $y = x^2$, $y = 2x + 3$. R: $x_G = 1$, $y_G = \frac{17}{5}$.

8. $y = x^2 - 2x - 3$, $y = 6x - x^2 - 3$ R: $x_G = 2$; $y_G = 1$.

9. $y = x^3$, $y = x$ $(0 < x < 1)$. R. $x_G = \frac{8}{15}$; $y_G = \frac{8}{21}$.

10. Determinar el centro de gravedad del área limitada por los ejes de coordenadas y la parabola

$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}.$$

R: $x_G = y_G = \frac{1}{5}a$

Determinar el centro de gravedad de las áreas encerradas por las siguientes curvas y rectas:

11. $y = c^2 - x^2$, $y = 0$ R: $x_G = 0$, $y_G = \frac{2}{5}c^2$

12. $y = x^2$, $y = 4$ R: $x_G = 0$, $y_G = \frac{12}{5}$

13. $x = y^2 - y$, $y = x$ R: $x_G = \frac{3}{5}$; $y_G = 1$

14. Hallar el baricentro del área correspondiente al primer cuadrante de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

R: $x_G = \frac{4a}{3\pi}$, $y_G = \frac{4b}{3\pi}$.

15. Hallar el centro de gravedad del área del triángulo curvilíneo determinado por el círculo $x^2 + y^2 = r^2$ y las rectas $x = r$, $y = r$.

R: $x_G = y_G = \frac{2r}{3(4 - \pi)}$.

16. Determinar el centro de gravedad del área encerrada por las parábolas $y^2 = 8x$, $y = x^2$.

R: $x_G = 0,9$; $y_G = 1,8$.

17. Determinar el centro de gravedad del área limitada por la cisoide

$$y^2(2a-x)=x^3$$

y su asíntota $x=2a$.

R: $x_G=\frac{5}{3}a$; $y_G=0$.

18. Hallar el centro de gravedad del área limitada por la curva de Agnesi

$$x^2y=4a^2(2a-y)$$

y el eje de las x.

R: $x_G=0$; $y_G=\frac{1}{2}a$.

19. Mostrar que el baricentro de un sector circular de radio r, de ángulo central α está a la distancia $\frac{4r}{3\alpha}\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha$ del centro del círculo y sobre la bisectriz del sector.

20 Hallar el centro de gravedad del área limitada por un arco de la cicloide

$$x=r(t-\operatorname{sen}t),\qquad y=r(1-\cos t),$$

y el eje de las x.

R. $x_G=r\pi$, $y_G=\frac{5}{6}r$.

Centro de gravedad de una superficie limitada por una curva dada en coordenadas polares: Sea $\varrho=f(\vartheta)$ la ecuación de una curva en coordenadas polares. Dividamos en n partes el sector $(\alpha,\ \beta)$ que limita el recinto. En cada una de ellas consideremos un sector circular de radio ϱ_i y de amplitud $\Delta\vartheta_i$ o un triángulo isósceles de base $\varrho_i\Delta\vartheta_i$ y altura ϱ_i. El centro de gravedad G_i está situado a $\frac{2}{3}$ de la altura de este triángulo (pág. 478). Las coordenadas cartesianas de este punto son $\frac{2}{3}\varrho_i\cos\vartheta_i$; $\frac{2}{3}\varrho_i\operatorname{sen}\vartheta_i$. Si toda la superficie del triángulo $\frac{1}{2}\varrho_i^2\Delta\vartheta_i$ está concentrada en este punto, los momentos estáticos respecto de los ejes Oy, Ox serán:

$$\frac{1}{3}\varrho_i^3\cos\vartheta_i\Delta\vartheta_i;$$

$$\frac{1}{3}\varrho_i^3\operatorname{sen}\vartheta_i\Delta\vartheta_i.$$

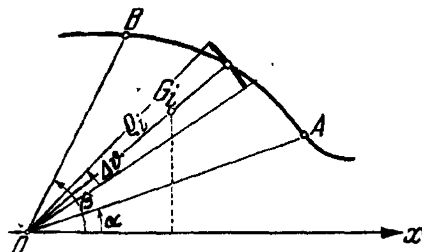


Fig. XIII-13.

Sumando todas las n expresiones análogas y pasando al límite se tienen las integrales

$$\frac{1}{3}\int_{\alpha}^{\beta} \varrho^3 \cos\vartheta \, d\vartheta; \qquad \frac{1}{3}\int_{\alpha}^{\beta} \varrho^3 \operatorname{sen}\vartheta \, d\vartheta.$$

Dividiendo estos valores por el área A total se tienen las coordenadas del centro de gravedad G:

$$x_G = \frac{1}{3A}\int_{\alpha}^{\beta} \varrho^3 \cos\vartheta \, d\vartheta; \qquad y_G = \frac{1}{3A}\int_{\alpha}^{\beta} \varrho^3 \operatorname{sen}\vartheta \, d\vartheta.$$

EJEMPLO:

Calcular el centro de gravedad del cuarto de círculo $\varrho = r$ para ϑ variando de 0 a $\frac{1}{2}\pi$.

El área A es $\frac{1}{4}\pi r^2$; $x_G = \frac{1}{\frac{3}{4}\pi r^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} r^3 \cos\vartheta \, d\vartheta = \frac{4r}{3\pi}$; $y_G = \frac{4r}{3\pi}$,

resultado que coincide con el hallado anteriormente utilizando coordenadas cartesianas.

EJERCICIOS:

1. Hallar el centro de gravedad del área total de la cardioide

$$\varrho = a\,(1 + \cos\vartheta).$$

R: $x_G = \frac{5}{6}a$; $y_G = 0$.

2. Verificar que la distancia al origen del centro de gravedad del área encerrada por una hoja de la curva

$$\varrho = a\cos 2\vartheta,$$

es igual a $\frac{128\,a\sqrt{2}}{105\,\pi}$.

3. Idem del área de una hoja de la curva

$$\varrho = a\cos 3\vartheta,$$

es $\frac{81\,a\sqrt{3}}{80\,\pi}$.

CENTRO DE GRAVEDAD DE UN SÓLIDO: Procediendo como en el caso de líneas y superficies, se puede calcular el centro de gravedad de un sólido, imponiendo la condición de anulación de los momentos respecto de planos que pasan por él.

En ciertos casos, cuando hay condiciones de simetría, se pueden expresar los momentos mediante integrales simples y éste es el único que consideraremos en este tomo, dejando para el otro el caso general que exige el empleo de integrales múltiples.

Así si el sólido se origina por la rotación de una curva $y = f(x)$

en torno del eje Ox, sólo es necesario determinar el valor x_G, pues G debe encontrarse sobre el eje Ox.

Para hallar el momento respecto del plano yz (es decir $x = 0$) pueden considerarse los cilindros $\pi y_i^2 \Delta x_i$ que se indican en la figura y que distan x_i de ese plano. Sumando las expresiones análogas para n intervalos Δx_i de (a, b) y pasando al límite resulta

$$M_x = \delta\pi \int_a^b xy^2\, dx.$$

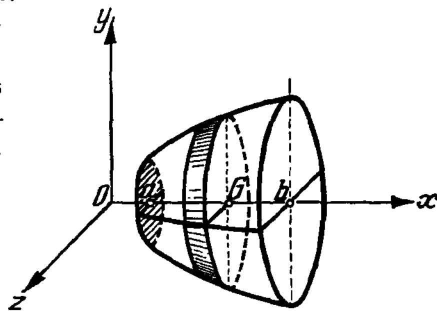


Fig. XIII-14.

El momento respecto a un plano paralelo al (yz) que pase por G será

$$\delta\pi \int_a^b (x - x_G) y^2\, dx$$

y su anulación determina

$$x_G = \frac{\pi \int_a^b xy^2\, dx}{\pi \int_a^b y^2\, dx} = \frac{\pi \int_a^b xy^2\, dx}{V},$$

siendo V el volumen del sólido de revolución de acuerdo a lo visto en la página 450.

Ejemplos:

1°) Determinar el centro de gravedad del sólido engendrado por la rotación de la curva

$$y = \operatorname{sen} x$$

para $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\pi$, alrededor del eje x.

Como es $V = \pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} y^2\, dx = \pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{2}\pi \left[x - \operatorname{sen} x \cdot \cos x \right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{4}\pi^2$

resulta

$$x_G = \frac{4}{\pi^2}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} x \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{2} x\, (1 - \cos 2x)\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{2} x \operatorname{sen} 2x \right]_0^{\frac{1}{2}\pi} \sim 1{,}103.$$

2°) **Calcular el centro de gravedad de un cono circular homogéneo de radio r y altura h.**

Considerando que el cono tiene su eje sobre Ox y que es originado por el segmento OP de ecuación

$$y = \frac{r}{h} x$$

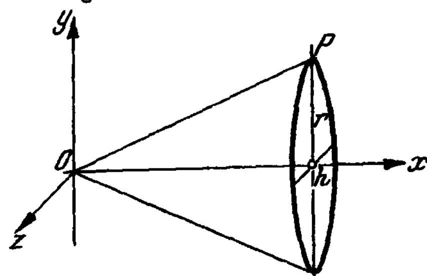


FIG. XIII-15.

resulta

$$x_G = \frac{\pi \int_0^h x\left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = \frac{3}{4}h.$$

El centro de gravedad de un cono circular recto y homogéneo está situado sobre su eje a $\frac{3}{4}$ de la altura medidos desde el vértice.

EJERCICIOS:

1 Hallar el centro de gravedad de una semiesfera de radio r.

R: $x_G = 0$; $y_G = \frac{3}{8} r$.

2 La parábola $y = x^2$ gira alrededor del eje x. Hallar el centro de gravedad del sólido de revolución así engendrado en el intervalo $0 < x < 1$.

R: $x_G = \frac{5}{6}$.

3 El área determinada por la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$, la recta $y = 1$ y el eje de las abscisas gira alrededor de Oy Determinar el centro de gravedad del sólido de revolución generado

R: $y_G = \frac{9}{16}$.

4 Determinar el centro de gravedad del sólido generado por la revolución alrededor del eje x del área de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ correspondiente al primer cuadrante.

R $x_G = \frac{3}{8} a$.

4. TEOREMAS DE PAPUS O DE GULDIN

Estos teoremas constituyen relaciones notables entre los volúmenes y áreas de los cuerpos originados por la rotación alrededor de un eje de las figuras planas y las correspondientes trayectorias de los centros de gravedad.

Partiendo de las fórmulas que dan las ordenadas del centro de gravedad de una línea o de una superficie resultan sucesivamente:

I) En el caso de las líneas (pág. 473)

$$y_G = \frac{\int_a^b y\, ds}{\int_a^b ds};$$

y como es $\int_a^b ds = s$, resulta:

$$(2\pi\, y_G)s = 2\pi \int_a^b y\, ds$$

y el segundo miembro mide el área de la superficie engendrada por la rotación de la curva $y(x)$ alrededor del eje x (ver pág. 459).

El primer miembro es el producto de la longitud de la circunferencia $2\pi y_G$ descripta por el centro de gravedad, por la longitud s de la curva. De aquí el teorema de Guldin: *El área descripta por una curva que gira alrededor de un eje es igual a la longitud de la circunferencia descripta por el centro de gravedad al girar alrededor del eje multiplicada por la longitud de la curva.*

II) La fórmula que da la expresión de la ordenada del centro de gravedad de una superficie también permite calcular otra fórmula notable. Por ser

$$y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\, dx}{\int_a^b y\, dx},$$

como el denominador es el área $A = \int_a^b y\, dx$, resulta:

$$(2\pi y_G)\, A = \pi \int_a^b y^2\, dx$$

y siendo el 2º miembro igual al volumen determinado por la curva al girar en torno del eje de las abscisas y el primer miembro igual al producto de la circunferencia descripta por el centro de gravedad multiplicada por el área encerrada por la curva, tenemos el 2º teorema de Guldin: *El volumen determinado por una curva plana al girar alrededor de un eje de su plano es igual a la longitud de la circunferencia descripta por el centro de gravedad al girar alrededor de ese eje multiplicada por la superficie correspondiente.*

EJEMPLOS:

1º) Si una circunferencia gira alrededor de un eje que no la atraviesa engendra un toro circular. Supongamos que la circunferencia de radio r tiene su centro C distante $a > r$ del eje Ox de rotación. Puesto que C es tanto el centro de gravedad de la circunferencia como del círculo, resultan para el área y el volumen del toro:

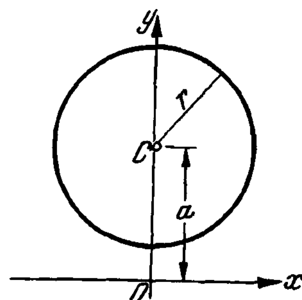


FIG. XIII-16.

Area del toro $= 2\pi a \cdot 2\pi r = 4\pi^2 ar$;

Volumen del toro $= 2\pi a \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 a r^2$.

2°) El teorema de Guldin sirve para determinar el centro de gravedad de una figura si se conoce el área del cuerpo engendrado por una figura que rota, o el volumen engendrado por la superficie correspondiente.
Tal es el caso de una *semicircunferencia* de radio r que al rotar alrededor de Ox determina una esfera. Por razones de simetría es $x_G = 0$. Para calcular y_G aplicamos el primer teorema de Guldin, teniendo en cuenta que el área de la esfera descripta por la semicircunferencia es $4\pi r^2$:

$$(2\pi y_G)\pi r = 4\pi r^2 \text{ o sea } y_G = \frac{2r}{\pi} \sim 0{,}637\, r,$$

resultado que ya habíamos logrado anteriormente (pág. 475).

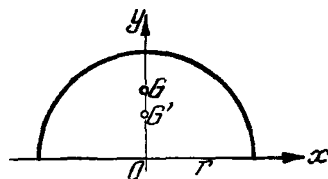


FIG XIII-17.

Si se busca el centro de gravedad G' del *semicírculo* de radio r es $x_G = 0$, y aplicando el segundo teorema de Guldin se tiene

$$(2\pi y_{G'})\frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{o sea} \quad y_{G'} = \frac{4r}{3\pi} \sim 0{,}423\, r,$$

que también habíamos mencionado antes (pág. 481, ej. 19).

3°) *Centro de gravedad del perímetro de un triángulo.* Consideremos el triángulo ABC e imaginemos una rotación alrededor del lado $BC = a$ Sea h la altura correspondiente a este lado. La superficie descripta estará constituída por dos conos cuyas áreas sumadas serán

$$\pi h \cdot c + \pi h \cdot b = \pi h\,(b + c).$$

Llamando d a la distancia del centro de gravedad buscado G al lado a (eje de rotación), la longitud de la circunferencia que describe G es igual a $2\pi d$. En virtud del teorema de Guldin resulta

$$\pi h\,(b + c) = 2\pi d\,(a + b + c)$$

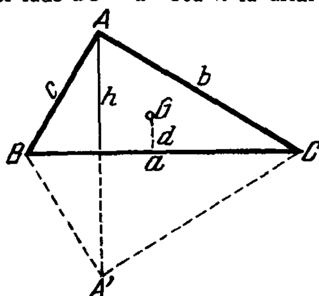


FIG. XIII-18

y por consiguiente es

$$d = \frac{1}{2} h \,\frac{b + c}{a + b + c}.$$

NOTA: Los enunciados de los teoremas I y II figuran en el libro VII de los célebres *Comentarios* que PAPO o PAPUS DE ALEJANDRÍA escribiera el año 320. Durante mucho tiempo se creyó que el autor de estas notables proposiciones fué PABLO GULDIN o GULDINUS, matemático suizo que vivió a principios del siglo XVII.

EJERCICIOS:

1. Hallar el área lateral y el volumen de un cono circular recto aplicando el teorema de Papus

2. La semicircunferencia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ gira alrededor de la recta $y = r$. Aplicando el teorema de Papus, determinar el área de la superficie engendrada.

   R· $2\pi(\pi - 2) r^2$.

3. El semicírculo $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ gira alrededor de la recta $y = x - r$. Determinar el volumen del sólido de revolución engendrado.

   R $\frac{3\pi + 4}{3} \frac{\pi r^3}{\sqrt{2}}$.

5. MOMENTOS DE INERCIA

Para calcular momentos de inercia de líneas, superficies o volúmenes continuos se procede en la misma forma que en los párrafos anteriores. Se divide el cuerpo en n partes cada una de masa Δm_i y si r_i es la distancia a un punto, a una recta o a un plano, el valor aproximado del momento de inercia será:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^2 \Delta m_i.$$

El límite cuando $n \to \infty$ y cada una de las partes en que se ha descompuesto el cuerpo tiende a cero, es por definición el momento de inercia $M^{(2)}$ (ó I) del cuerpo:

$$M^{(2)} = I = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \Delta m_i.$$

Cuando este límite exista, podremos calcular el momento de inercia mediante la integral definida:

$$I = \int_a^b r^2 \, dm.$$

Veamos algunos ejemplos·

1°) *Momento de inercia de un rectángulo ABCD.*

a) *Respecto de la base $b = AB$.* Eligiendo los ejes coordenados, como lo indica la figura, resulta para un elemento situado a la distancia y de b:

$$\Delta m = b \Delta y \cdot \delta,$$

siendo δ la densidad superficial.
El momento de inercia será

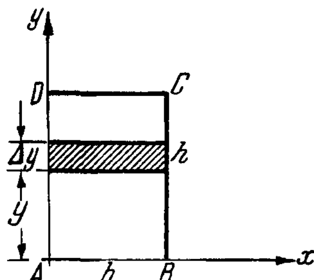


FIG. XIII-19.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \Delta m_i = \delta \cdot b \int_0^h y^2 dy = \delta \cdot b \frac{\left[y^3\right]_0^h}{3} = \frac{1}{3}\delta \cdot b \cdot h^3 = \frac{1}{3}(\delta \cdot b \cdot h)h^2 = \frac{Mh^2}{3}$$

siendo M la masa total igual a la superficie $b \times h$ multiplicada por la densidad δ.

b) *Respecto del lado* $AD = h$. Procediendo en la misma forma que en el caso a), con rectángulos de base Δx y altura h situados a distancia x del lado AD, resulta como momento de inercia $\frac{1}{3}M \cdot b^2$.

Como vale el teorema de Steiner que afirma que el momento de inercia respecto de un eje es igual al momento de inercia de un eje baricéntrico paralelo, más el producto de la masa del cuerpo por el cuadrado de la distancia.

$$I = I_g^{(2)} + Md^2,$$

resulta de inmediato que los momentos de inercia del rectángulo (b, h) respecto de los ejes $(1, 1)$, $(2, 2)$, paralelos a los anteriores y que pasan por G son:

$$I_{1,1} = I_b - M(\frac{1}{2}h)^2 = \frac{1}{3}Mh^2 - \frac{1}{4}Mh^2 = \frac{1}{12}Mh^2 = \frac{1}{12}bh^3;$$

$$I_{2,2} = I_h - M(\frac{1}{2}b)^2 = \frac{1}{3}Mb^2 - \frac{1}{4}Mb^2 = \frac{1}{12}Mb^2 = \frac{1}{12}hb^3.$$

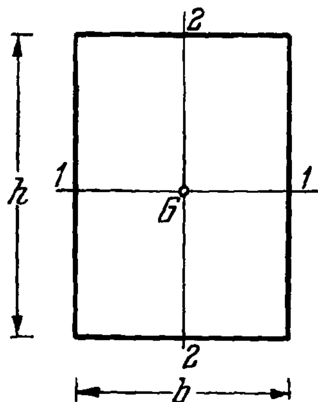


FIG. XIII-20.

Por consiguiente, el momento polar de inercia respecto de G es

$$I_G = I_{1,1} + I_{2,2} = \frac{1}{12}M(h^2 + b^2).$$

2º) *Momento de inercia de un hierro en doble te.*

Consideremos un hierro en doble te de alas anchas y paralelas, en el cual hemos supuesto —para simplificar— que no hay contornos curvos. Sea yy un eje baricéntrico, tal como lo hemos señalado en la figura. Para calcular el momento de inercia respecto de yy, será suficiente, por razones de simetría, calcular el momento de inercia de la mitad de la figura y luego duplicar el resultado.

Tanto el rectángulo superior como el inferior tienen base $\frac{1}{2}b$ y altura t. El momento de inercia de cada uno de ellos respecto de yy es (dejando de lado la densidad δ): $\frac{1}{3}t(\frac{1}{2}b)^3$. El momento de inercia del rectángulo dispuesto verticalmente de base $\frac{1}{2}d$ y altura $(h - 2t)$ es

$$\frac{1}{3}(h - 2t)\frac{d^3}{8}.$$

El momento de inercia de toda la figura que está a la derecha de yy es

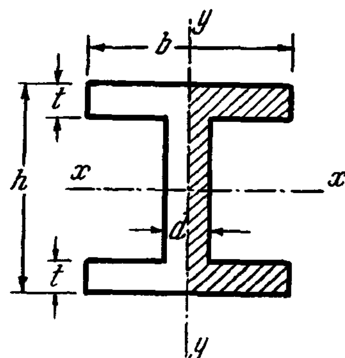


FIG. XIII-21.

$$\frac{t \cdot b^3}{12} + \frac{d^3}{24}(h - 2t).$$

El momento de inercia del perfil será el doble de este valor:

$$\frac{t \cdot b^3}{6} + \frac{d^3}{12}(h - 2t).$$

Para el perfil 20 el *Manual Hutte* (t. I. pág. 932, ed. en castellano, 1938) da los siguientes datos en mm·

$$h = 200, \ b = 200; \ d = 10, \ t = 16,$$

con lo que resulta como valor del momento de inercia respecto del eje yy el valor 2 134,73 cm^4. El mismo manual da el valor 2 140 cm^4 para el perfil 20; la diferencia se debe a la existencia de partes curvas en el contorno, que hemos omitido en este cálculo.

Si se quiere hallar el momento de inercia respecto del eje xx, convendrá aplicar en los rectángulos superior e inferior el teorema de Steiner. Siendo el momento baricéntrico de estos rectángulos (dejando de lado el factor δ) igual a $\frac{b \cdot t^3}{12}$ y la distancia de su eje baricéntrico al eje xx igual a $\frac{1}{2}(h - t)$ resulta como momento respecto del eje xx:

$$\frac{b \cdot t^3}{12} + \frac{1}{4}(h - t)^2 \, b \cdot t.$$

El momento del rectángulo dispuesto verticalmente es $\frac{d(h - 2t)^3}{12}$ y el momento del perfil resulta entonces:

$$\frac{b \cdot t^3}{6} + \frac{1}{2}(h - t)^2 \, b \cdot t + \frac{d(h - 2t)^3}{12}.$$

Con los datos anteriores resulta: 5 825,75 cm^4, mientras que el *Manual Hutte* da, para el perfil correspondiente con los cantos curvos, el valor 5 950 cm^4.

3°) *Momento polar de inercia de un círculo.*

Sea un círculo homogéneo de radio r y de densidad superficial δ. Considerando una corona circular de radios x_i y $x_i + \Delta x_i$, su masa es

$$2\pi x_i \cdot \Delta x_i \delta,$$

y el momento de inercia de n coronas análogas con respecto al origen resulta

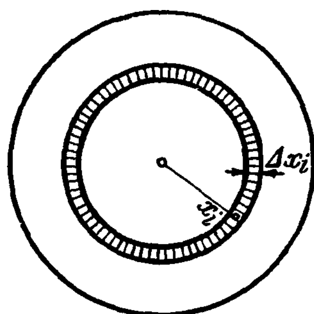


FIG. XIII-22.

$$2\pi\delta \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \Delta x_i,$$

pues hay que multiplicar cada una de las expresiones anteriores por el cuadrado de la distancia al origen. Pasando al límite se obtiene el momento polar de inercia

$$I_0 = 2\pi\delta \int_0^r x^3\,dx = \frac{1}{2}\pi\delta r^4 = \pi r^2\delta\ \frac{1}{2}r^2 = \frac{1}{2}Mr^2,$$

siendo M la masa total del círculo y r su radio.

4°) *Momento de inercia de un cilindro recto.*

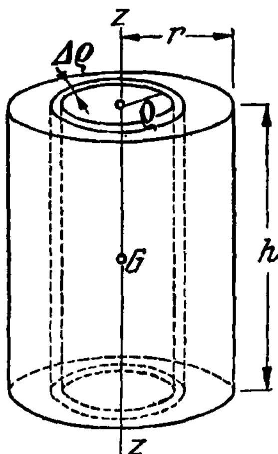


FIG XIII-23.

Consideremos un cilindro circular de radio r y altura h y determinemos su momento de inercia respecto de un eje z paralelo a las generatrices del cilindro y que pasa por su centro de gravedad. Todos los puntos comprendidos en la superficie cilíndrica de altura h, limitada por la corona de radios ϱ, $\varrho + \Delta\varrho$ están a una distancia ϱ del eje z. El momento de inercia de estos puntos será (siendo δ la densidad):

$$2\,\pi\varrho\Delta\varrho\, h \cdot \delta \cdot \varrho^2.$$

Sumando n expresiones análogas y pasando al límite cuando $n \to \infty$ resulta:

$$I_z = 2\,\pi h\delta \int_0^r \varrho^3\,d\varrho = \pi r^2 h \cdot \delta\frac{1}{2}r^2 = \frac{1}{2}Mr^2$$

siendo M la masa total del cilindro.

EJERCICIOS (1):

1. Hallar el momento de inercia del área del círculo de radio r respecto a un diámetro.

   R: $\frac{1}{4}\pi r^4$.

Determinar el momento de inercia I_y para el área encerrada por los ejes y las siguientes curvas:

2. $y = 4 - x^2$. R: $\frac{64}{15}$.

3. $y = x^2 - x^3$. R: $\frac{1}{30}$.

4. $y^2 = 2 - x$. R: $\frac{128}{105}\sqrt{2}$.

5. $y = 2x - x^2$. R: 1,6.

(1) En estos ejercicios se ha supuesto que la figura es homogénea y no habiéndose considerado la densidad, los resultados se refieren a los *momentos geométricos*.

Determinar el momento de inercia I_x para el área encerrada por el eje de las abscisas y las siguientes curvas y rectas:

6. $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$. R: $\frac{1}{9}(e^3 - 1)$.

7. $y = \operatorname{sen} x$, $x = 0$, $x = \frac{1}{2}\pi$. R: $\frac{2}{9}$.

8. $y = 2x^3$, $x = 1$, $x = 2$. R: 272,8.

9 $x^2 + y^2 = 4$, $x = 0$, $x = 2$. R: π.

10. Determinar el momento de inercia axial respecto del eje x del área del triángulo limitado por los ejes y la recta

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

R: $\frac{ab^3}{12}$.

11. Determinar el momento de inercia axial respecto del eje x del área limitada por el eje Ox y la curva

$$y = 1 - x^2.$$

R: $\frac{32}{105}$.

12. Verificar que para el área de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

se tienen los momentos de inercia axiales: $I_x = \frac{1}{4}\pi a^3 b$; $I_y = \frac{1}{4}\pi ab^3$ y el momento de inercia polar $I_0 = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$.

13 Mostrar que el momento polar de inercia respecto del origen del sector circular de ángulo central α en el círculo

$$\varrho = r$$

es $\frac{1}{4}\alpha r^4$.

Determinar el momento de inercia polar del área limitada por una hoja de las siguientes curvas·

14. $\varrho^2 = 2 \operatorname{sen} 2\vartheta$. R $\frac{1}{4}\pi$.

15. $\varrho = \operatorname{sen} 2\vartheta$. R: $\frac{3}{64}\pi$.

16. $\varrho = \cos 3\vartheta$. R: $\frac{3}{32}\pi$.

17. El área limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 4$ gira alrededor del

eje y generando un sólido de revolución. Hallar el momento de inercia del cuerpo respecto del eje Oy. (Tómese la densidad $\delta = 1$).

R: $\frac{32}{3}\pi$.

18. El área limitada por la curva $y^2 = x^3$, el eje Ox y la recta $x = 1$ gira alrededor del eje de las abscisas, engendrando un sólido de revolución. Determinar los momentos de inercia del cuerpo respecto de los ejes coordenados.

R: $I_x = \frac{1}{14}\pi\delta$; $I_y = \frac{4}{11}\pi\delta$.

19. Verificar que el momento de inercia de un cono circular de altura h y radio r respecto de su eje es igual a $\frac{1}{10}\pi\delta r^4 h$.

20 Calcular el momento polar de inercia de una esfera de radio r respecto de su centro.

SOLUCIÓN:

Los puntos comprendidos entre 2 superficies esféricas de radios ϱ y $\varrho + d\varrho$ tienen una masa igual a $4\pi\varrho^2 d\varrho$ multiplicadas por la densidad δ que supondremos constante. El momento polar de inercia será

$$I_0 = 4\pi\delta \int_0^r \varrho^4 d\varrho = \frac{4}{3}\pi r^3 \delta \; \frac{1}{5} r^2 \cdot 3 = \frac{3}{5} M r^2.$$

Como la distancia ϱ de cada punto $P\,(x, y, z)$ de la esfera con respecto a O está dada por la relación $\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, resulta que los momentos respecto de cada plano coordenado serán $\frac{1}{5}Mr^2$ y los momentos respecto de cada eje serán $\frac{2}{5}Mr^2$.

6. TRABAJO

Definición: Cuando una fuerza $\vec{F}$ actúa sobre un punto material que se desplaza, se dice que efectúa un *trabajo*.



FIG XIII-24.

Consideraremos primero el caso en que la fuerza $\vec{F}$ actúa sobre un punto que se mueve sobre un segmento rectilíneo.

Si la fuerza $\vec{F}$ tiene una intensidad F constante y su dirección coincide con la de la recta (a, b), el trabajo se mide por el producto $F \times (b - a)$.

Si la fuerza $F(x)$ de dirección coincidente con la de la recta (a, b) es variable, para definir el trabajo se divide el segmento en n partes, iguales o desiguales, mediante los puntos $x_1 = a$, x_2, $\ldots$, $x_n = b$ y considerando en cada uno de estos intervalos un valor ξ_i se forma la suma

$$\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Pasando al límite cuando $n \to \infty$ se tiene la expresión del trabajo

$$\mathscr{C} = \int_a^b F(x)\, dx.$$

Si la fuerza además de ser variable se mueve sobre una curva cualquiera el trabajo se expresa mediante las *integrales curvilíneas* que estudiaremos en el próximo tomo.

EJEMPLOS·

1°) Se llaman *fuerzas elásticas* a las que actúan sobre un punto proporcionalmente a la distancia a un punto fijo que tomaremos como origen. Será entonces $F(x) = -kx$ (1). Calcularemos el trabajo necesario para llevar esta fuerza de A a B de acuerdo a las notaciones de la figura.

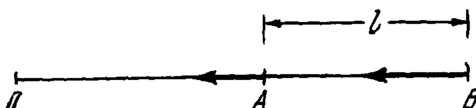


FIG. XIII-25.

Si designamos con a y b las abscisas de A y B, respectivamente, resulta

$$\mathscr{C} = \int_a^b F(x)\, dx = -k\int_a^b x\, dx = -k\frac{1}{2}\Big[x^2\Big]_a^b = -\frac{1}{2}k(b^2 - a^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}k(b-a)(b+a) = F_m l$$

siendo $l = (b-a)$, la longitud del camino AB y F_m el promedio de las fuerzas que actúan en A y en B

EJERCICIOS

1 La fuerza para estirar un resorte es proporcional a la elongación La fuerza es de 12 kg cuando el resorte ha sido comprimido 2,5 cm. Calcular el trabajo realizado para comprimir el resorte 6 cm desde su posición de reposo

SOLUCIÓN:

La fuerza F necesaria para comprimir el resorte x cm es $F = -kx$. $F = 12$ kg cuando $x = 2{,}5$ cm, o sea $12 = -2{,}5\,k$ y $k = -4{,}8$.
El trabajo realizado es

$$\mathscr{C} = \int_a^b F\, dx = -k\int_a^b x\, dx = 4{,}8\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^6 = 4{,}8 \cdot 18 = 86{,}4 \text{ kg}\cdot\text{cm} = 0{,}864 \text{ kgm}.$$

2 Un resorte tiene la longitud inicial de 18 cm y una fuerza de 10 kg es suficiente para llevarlo a la longitud de 16 cm. ¿Cuál es el valor de la constante k para este resorte? ¿Cuál es el trabajo necesario para comprimirlo de 16 a 12 cm?

R. $k = -5$ kg/cm, $\mathscr{C} = 2{,}8$ kgm

(1) El signo menos que precede a la constante $k > 0$, se debe a que la fuerza tiende a mover al punto en sentido contrario al sentido positivo de las abscisas.

2º) *Teorema de la fuerza viva.* Si un cuerpo de masa m tiene una velocidad v se dice que tiene una ***energía cinética*** o ***fuerza viva*** $E = \frac{1}{2}mv^2$. Veremos la relación entre la variación de esta fuerza viva y el trabajo de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, teniendo presente la relación fundamental de la dinámica. $F =$ masa $\times$ aceleración $= m\frac{d^2x}{dt^2}$, si suponemos un cuerpo de masa m moviéndose sobre una recta bajo la acción de una fuerza F. Entonces es.

$$\mathcal{C} = \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b m\frac{d^2x}{dt^2}\,dx = \int_a^b m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)dx.$$

Pero $\frac{dx}{dt} = v$ donde v designa la *velocidad*, por consiguiente se tiene

$$\mathcal{C} = \int_{v_1}^{v_2} m\frac{d}{dt}(v)\cdot v\,dt = \int_{v_1}^{v_2} \frac{d}{dt}[(mv)]\cdot v\,dt.$$

La expresión subintegral evidentemente se puede escribir $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2)\,dt$, e integrando se tiene el teorema de la fuerza viva:

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2}m\Big[v^2\Big]_{v_1}^{v_2} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = E_2 - E_1.$$

Si un cuerpo se mueve bajo la acción de una fuerza, el trabajo de estas fuerzas es igual a la variación de la fuerza viva.

3º) *Trabajo de la gravedad.* Cuando un cuerpo recorre una trayectoria bajo la acción de su peso efectúa un trabajo que sólo depende de los extremos de la trayectoria.

Deberemos generalizar la noción de trabajo al caso de una fuerza constante y una trayectoria curvilínea.

Consideremos en un plano vertical un cuerpo que recorre el arco APB bajo la acción de su peso $p = mg$ (fuerza constante).

El trabajo elemental de la fuerza cuando el punto pasa de P a Q es por definición $p \times PQ \times \cos(p, PQ) = p \times P'Q'$, siendo P' y Q' las proyecciones de estos puntos sobre el eje vertical.

Dividiendo la trayectoria APB en n partes y sumando los trabajos elementales resultará como trabajo total

$$p\sum P'Q' = p \times A'B' = p\,(y_B - y_A).$$

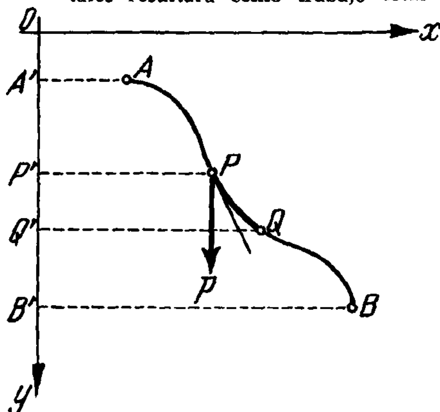


FIG. XIII-26.

Esta fórmula muestra que el trabajo no depende del conjunto de puntos de la trayectoria sino de sus extremos exclusivamente. Cuando esto ocurre se dice que la fuerza deriva de un *potencial.* En este caso particular el potencial es $p \cdot y$ y el trabajo es igual a la disminución de esta energía potencial.

4º) *Trabajo de expansión de un gas perfecto.* Consideremos el gas contenido en el interior de un cilindro con pistón de sección s. Cuando el gas se expande, es decir aumenta su volumen (y por consiguiente dismi-

nuye su presión), el pistón se mueve de modo que el gas ha realizado un *trabajo*. Como la fuerza = presión × sección, es variable (dado que la presión varía con cada posición del pistón) definiremos el trabajo $\mathcal{T}$ mediante la integral definida:

$$\mathcal{T} = \int_a^b p \cdot s\, dx.$$

Ahora bien, $s\,dx$, es el producto de la sección del cilindro por el desplazamiento, o sea mide el volumen determinado por el desplazamiento del pistón y resulta como expresión del trabajo

$$\mathcal{T} = \int_{v_1}^{v_2} p\, dv.$$

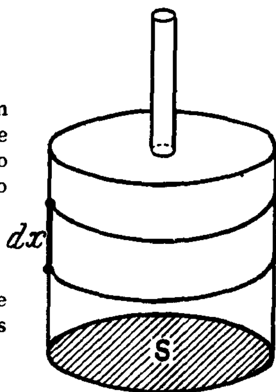


Fig. XIII-27.

Ahora es necesario conocer la relación entre p y v para calcular el trabajo. Consideraremos algunos casos especiales:

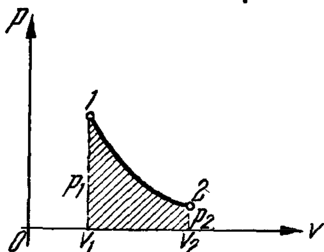


Fig. XIII-28.

a) Si la expansión es *isotérmica* (a temperatura absoluta T constante), se cumple la ley de Boyle-Mariotte.

$$pv = p_1v_1 = nRT, \quad \text{o sea} \quad p = \frac{p_1v_1}{v}$$

y la expresión del trabajo resulta

$$\mathcal{T} = \int_{v_1}^{v_2} \frac{p_1v_1}{v}\, dv = p_1v_1 \Big[\ln v\Big]_{v_1}^{v_2} = p_1v_1 \ln\frac{v_2}{v_1} = nRT \ln\frac{v_2}{v_1}.$$

b) Si la expansión es *adiabática* (es decir si no hay intercambio de calor con el medio exterior) vale la ley de Poisson,

$$pv^k = \text{constante} = C,$$

con k = constante (igual a $\frac{5}{3}$ para los gases monoatómicos y a $\frac{7}{5}$ para los diatómicos). El trabajo se expresa entonces por·

$$\mathcal{T} = \int_{v_1}^{v_2} p\, dv = \int_{v_1}^{v_2} \frac{p_1v_1^k}{v^k}\, dv = \int \frac{p_1v_1^k}{k-1}\left[\frac{1}{v_1^{k-1}} - \frac{1}{v_2^{k-1}}\right] =$$

$$= \frac{p_1v_1}{k-1}\left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{k-1}\right] = \frac{p_1v_1}{k-1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{k-1}\right] = \frac{1}{k-1}(p_1v_1 - p_2v_2).$$

Esta misma expresión vale para los *cambios politrópicos* (calor específico constante), cuya ley es pv^n = constante.

Ejercicios·

1. Una cantidad de aire sometida a la presión de 1,0545 atmósferas es comprimida isotérmicamente de 32 772 a 65,544 cm³. Calcular el trabajo realizado. R: 2 157,765 kgm.

2. Determinar el trabajo necesario para comprimir el volumen de aire del ejercicio 1 adiabáticamente ($pv^{1,4}$ = constante).

R. 9 559,722 kgm.

3 Un volumen de 3 277,2 cm³ sometido a la presión de 1,0545 atmósferas es comprimido hasta ocupar 819,3 cm³. Calcular el trabajo realizado en la compresión cuando

a) es isotérmica pv = constante,

b) es adiabática $pv^{1,4}$ = constante.

R. a) 47,9 kgm, b) 58,77 kgm.

4 Una masa de gas que ocupa un volumen inicial de 453,040 cm³ a la presión de 4,218 atmósferas se expande hasta tener la presión de 2,109 atmósferas. Calcular el volumen final y el trabajo realizado por el gas si la ley es

a) pv = constante;

b) $pv^{1,2}$ = constante.

R. a) 906,080 cm³, 13 305,555 kgm, b) 806,977 cm³, 10 500 kgm.

El ciclo de Carnot: Un ciclo es una transformación de un gas que partiendo de ciertos valores de sus variables (presión, temperatura, volumen, . .) vuelve a sus valores iniciales.

Cuando un gas ideal efectúa un ciclo recorriendo dos isotermas y dos adiabáticas se dice que ha efectuado un ciclo de Carnot. Partiendo del estado 1 (con volumen v_1 y presión p_1) recorre comprimiéndose la adiabática 1-2, llegando a un volumen v_2 y presión p_2. De allí se expande según la isoterma 2-3 corespondiente a la temperatura T hasta llegar al estado 3 Desde 3 comienza la expansión adiabática de T a T_0 llegando al estado 4, desde donde sufre la compresión isotérmica (temperatura T_0) volviendo al estado inicial.

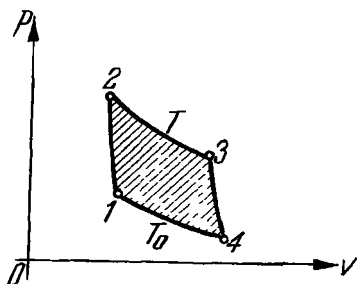


Fig XIII-29

Calculemos el trabajo que ha entregado el sistema, medido de acuerdo a lo visto anteriormente por el área encerrada por las isotermas y adiabáticas entre los puntos 1, 2, 3, 4.

Durante los pasajes de 1 a 2 y de 3 a 4 (adiabáticas) el intercambio de calor es cero y el trabajo también es, cero.

Entre 2 y 3 (isoterma) el trabajo es

$$\mathcal{T}_2 = nRT \ln \frac{v_3}{v_2}$$

y entre 4 y 1 (isoterma) es

$$\mathcal{T}_1 = nRT_0 \ln \frac{v_4}{v_1}.$$

De acuerdo a las relaciones entre adiabáticas e isotermas:

$$p_1v_1 = p_4v_4 \qquad\qquad p_2v_2 = p_3v_3$$

$$p_1v_1{}^k = p_2v_2{}^k \qquad\qquad p_3v_3{}^k = p_4v_4{}^k$$

resulta

$$\frac{v_3}{v_2} = \frac{v_4}{v_1}$$

y por consiguiente los logaritmos de estas relaciones también serán iguales, con lo que se tiene

$$\frac{\mathcal{T}_2}{T} = \frac{\mathcal{T}_1}{T_0}$$

o sea, si sustituímos las expresiones $\mathcal{T}$ por las correspondientes *cantidades de calor* Q, utilizando el equivalente calórico del trabajo,

$$\frac{Q_2}{T} = \frac{Q_1}{T_0}.$$

El rendimiento térmico es

$$\eta = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2}$$

y de acuerdo a la relación anterior resulta

$$\eta = \frac{T - T_0}{T},$$

con lo cual se muestra que *para un gas ideal el rendimiento térmico de un ciclo de Carnot depende exclusivamente de las temperaturas de las fuentes.*

Capítulo XIV

SERIES NUMERICAS

1. DEFINICIONES

Dada una sucesión de *infinitos* números $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ se llama *serie* a la expresión:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

Como se ve, se trata de "una suma de infinitos sumandos". Pero ¿qué significa "sumar infinitos sumandos"? Llamaremos S, *suma de la serie*, al límite de la sucesión de las sumas parciales $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (u_0 + u_1 + \ldots + u_n).$$

Si este límite [1] es finito la serie se llama *convergente;* si es infinito la serie se llama *divergente* y si S_n no tiende a ningún límite la serie se llama *oscilante.*

Ejemplos:

1º) Sea la serie $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots$.

La suma parcial S_n es en este caso

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 - \frac{1}{n+2}.$$

Calculando el límite de esta expresión cuando $n \to \infty$, resulta

$$S = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1.$$

La serie es convergente y su suma es 1.

2º) La serie $1 + 2 + 3 + \ldots$ es evidentemente *divergente* pues $S_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

3º) La serie $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ es *oscilante* pues la suma S_n es alternadamente igual a 1 ó 0 según se tome un número impar o par de términos. Por consiguiente S_n no tiende a ningún valor definido cuando $n \to \infty$.

---

(1) Hemos definido el límite de una sucesión en la página 123

EJERCICIOS:

Escribir el término general de las siguientes series ([1]):

1. $3 - 9 + 27 - 81 + \cdots$ R: $(-1)^n 3^{n+1}$.

2. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$ R: $\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

3. $2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \cdots$ R. $\frac{n+2}{n+1}$.

4. $x + \frac{x^2}{1} + \frac{x^3}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$ R. $\frac{x^{n+1}}{n!}$.

5. $\frac{\sqrt{x}}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{x}}{4} + \frac{x^2}{8} + \cdots$ R: $\frac{x^{\frac{1}{2}(n+1)}}{2^n}$.

6. $\frac{z^4}{2} - \frac{z^6}{4} + \frac{z^8}{6} - \frac{z^{10}}{8} + \cdots$ R: $(-1)^n \frac{z^{2n}}{2(n-1)}$, $n \geqslant 2$.

Calcular la suma de los 4 primeros términos de las series cuyo término general se indica:

7. $u_n = \frac{1}{n}$, para $n \geqslant 1$. R. $\frac{25}{12}$.

8. $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, para $n \geqslant 1$. R: $\frac{7}{12}$.

9. $u_n = (-2)^n$, para $n \geqslant 0$. R. -5.

10. $u_n = \frac{1}{n^2}$, para $n \geqslant 1$. R: $\frac{205}{144}$.

11. $u_n = \frac{(-1)^n}{n!}$, para $n \geqslant 10$. R: $\frac{1}{3}$.

12. $u_n = \frac{2^n}{n!}$, para $n \geqslant 0$. R: $\frac{19}{3}$.

2. SERIE GEOMETRICA

Es aquella en la cual cada término es igual al anterior multiplicado por un factor constante llamado *razón* de la serie.

En particular si el primer término es 1 y la razón es q resulta la serie:

([1]) Hemos escrito como subíndice del primer término u_0 el valor 0. Algunas veces se comienza por el valor u_1, lo cual no trae aparejado ningún cambio en el desarrollo ulterior. Correspondientemente a veces la suma parcial S_n tiene n y otras $(n+1)$ términos.

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

Para estudiar en que casos la serie geométrica converge y en cuales diverge, formemos la suma de los $(n + 1)$ primeros términos

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n.$$

Por tratarse de una progresión geométrica, para $q \neq 1$ (1), es:

$$S_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{q^{n+1}}{q - 1} - \frac{1}{q - 1} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^{n+1}}{1 - q}.$$

En tanto sea $-1 < q < 1$, es decir $|q| < 1$, q^{n+1} tiende a 0 y por consiguiente el segundo término tiende a 0, quedando

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{1 - q}.$$

La serie geométrica es *convergente* si $|q| < 1$ y su suma es igual al primer término dividido por 1 menos la razón.

Si $q = 1$, la expresión anterior de S_n no puede emplearse (¿por qué?) pero siendo todos los términos iguales a 1 resulta $S_n = n$ y $S_n \to \infty$: la serie es *divergente.*

Si $q = -1$, $S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \pm 1$ y la serie es *oscilante* pues S_n vale 1 ó 0 y no tiende a un límite único.

Si $q > 1$, evidentemente es $S_n > n$ y cuando $n \to \infty$, $S_n \to \infty$: la serie es *divergente.*

Si $q < -1$, $q^{n+1} \to \pm \infty$ y la serie también resulta *oscilante.*

La generalización de la discusión anterior a la serie

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots$$

está resumida en el siguiente cuadro·

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \begin{cases} \text{si } |q| < 1 & \text{es } S = \dfrac{a}{1 - q}. \\ \text{si } q \geqslant 1 & \text{es divergente.} \\ \text{si } q \leqslant -1 & \text{es oscilante.} \end{cases}$$

---

(1) Para obtener una expresión de S_n basta multiplicar ambos miembros de la igualdad por q y restar miembro a miembro· $S_n q - S_n = q^{n+1} - 1$ o sea $S_n = \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$. La demostración rigurosa de esta fórmula se hace mediante el principio de inducción completa (ver Cap I, pág. 15).

EJEMPLOS.

1°) Calcular la suma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$.

Por tratarse de una serie geométrica de razon $\frac{1}{2}$ es convergente:

$$S=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

2°) Expresar como fracción ordinaria el decimal periodico $N=0{,}282828\ldots$

Siendo

$$N=\frac{28}{100}+\frac{28}{100^2}+\frac{28}{100^3}+\cdots$$

una serie geométrica de razón $\frac{1}{100}$, resulta $N=\dfrac{\frac{28}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{28}{99}$.

EJERCICIOS

Dado el primer término y la razón de las siguientes series geométricas, calcular la suma parcial S_4 y la total S

1 $a=1$, $q=2$. R. $S_4=15$, $S=\infty$.

2 $a=5$, $q=-1$. R. $S_4=0$, oscila.

3. $a=1$, $q=-\frac{1}{3}$. R $S_4=\frac{20}{27}$, $S=\frac{3}{4}$.

4 $a=9$, $q=\frac{1}{3}$. R $S_4=\frac{40}{3}$, $S=\frac{27}{2}$.

5 Calcular la suma

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\cdots$$

Marcar sobre una recta, en la que se ha señalado un origen O y una unidad de medida, los valores de las sumas parciales que se acercan por ambos lados al punto de abscisa $\frac{1}{3}$.

6 Calcular la suma de la serie

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\frac{2}{3^6}+\cdots$$

R $\frac{5}{8}$.

(Obsérvese que los términos de orden impar y los de orden par forman separadamente 2 series geométricas cuyas sumas son $\frac{3}{8}$ y $\frac{1}{4}$).

7 Expresar como fracción ordinaria el decimal periódico 0,142857 142857 ...

R $\frac{1}{7}$.

8. Expresar como fracción ordinaria el decimal periódico: $N = 0{,}abc\,abc\,abc \ldots$ donde a, b, c son dígitos cualesquiera.

R: $N = \frac{abc}{999}$.

9. Expresar como fracción ordinaria el decimal periódico mixto:

$$0{,}38\,153\,153 \ldots.$$

R: $\frac{38153 - 38}{99900} = \frac{38115}{99900}$.

(Procédase como en el ejemplo 2°).

10. Demostrar que un decimal periódico mixto es igual a una fracción ordinaria cuyo numerador es igual al número formado por el no-período y el periodo menos el no-período y cuyo denominador se forma con tantos 9 como cifras tiene el período seguido de tantos ceros como cifras tiene el no-período.

11. En un cuadrado de 5 cm de lado se unen los puntos medios de sus lados y se tiene un nuevo cuadrado En este segundo cuadrado se unen los puntos medios y se obtiene un tercer cuadrado. Así se continúa indefinidamente. ¿Cuál es la suma de las áreas de los infinitos cuadrados? Generalícese para un cuadrado de lado a.

R. 50 cm^2, $2a^2$.

(Obsérvese que la suma de las áreas es una serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$).

12. Trácese desde el vértice C del ángulo recto de un triángulo rectángulo ABC la altura correspondiente a la hipotenusa c. Desde su pie trácese la perpendicular al cateto b, desde su pie la perpendicular a la hipotenusa y así sucesivamente. Calcúlese la longitud total de la poligonal de infinitos lados así obtenida.

R $ab : (c - b)$.

(Obsérvese que los triángulos rectángulos que se van formando al trazar las perpendiculares son semejantes al triángulo dado. Resulta una serie geométrica de razón $\frac{b}{c}$).

13. Probar que la suma

$$S = 1 + 2r + 2r^2 + \ldots$$

es convergente si $-1 < r < 1$ y que es $S = \frac{1 + r}{1 - r}$.

14. Dada la serie

$$r + \frac{r}{1 + r} + \frac{r}{(1 + r)^2} + \cdots$$

determinar para qué valores converge y en ese caso calcular la suma.

R: La serie converge si $r > 0$ ó $r < -2$; la suma es $1 + r$. También converge si $r = 0$ y la suma es 0.

15 *Aquiles y la tortuga.*

Aquiles, "el de los pies ligeros" corre con una velocidad de 10 metros por segundo y la tortuga con una velocidad de 10 centímetros por segundo. Supongamos que Aquiles parte de A para alcanzar a la tortuga que sale, en el mismo instante de T, siendo la distancia $AT = 990$ m. Cuando Aquiles llegue a T, la tortuga llegará a T', cuando Aquiles llegue a T', la tortuga llegará a T'' y así sucesivamente. ¿Alcanzará Aquiles a la tortuga? En caso afirmativo ¿cuándo la alcanzará?

Generalícese para una distancia $AT = l$ y una velocidad de Aquiles n veces superior a la velocidad de la tortuga v_T.

Solución:

Si A corre hacia T, tardará 99 segundos en llegar a T. En esos 99 segundos la tortuga se habrá trasladado a T' con $TT' = 99 \times 0{,}1 = 9{,}9$ m. Aquiles



FIG. XIV-1.

que ha llegado a T para alcanzar el punto T' empleará $9{,}9 : 10 = 0{,}99$ segundos. En este tiempo la tortuga se ha trasladado a T'' con $T'T'' = 0{,}99 \times 0{,}1 = 0{,}099$ m y Aquiles empleará, para recorrer esa distancia, $0{,}099 \cdot 10 = 0{,}0099$ segundos

El tiempo total que emplea Aquiles para alcanzar a la tortuga es

$$99 + 0{,}99 + 0{,}0099 + \ldots,$$

serie geométrica de razón 0,01 cuya suma será $99 \; (1 - 0{,}01) = 100$ segundos.

En general será $t = \dfrac{l}{v_T(n-1)}$.

También puede resolverse elementalmente mediante la ecuación de primer grado $10\,t = 0{,}1\,t + 990$, obtenida igualando los espacios recorridos al cabo de un tiempo t

Este problema está vinculado a una de las 4 célebres ***aporías*** de Zenón de Elea a las que se refiere ARISTÓTELES en su *Física*.

El problema, tal como lo hemos planteado, exige sumar ***infinitos*** términos. La suma de un número infinito de términos ¿puede resultar finita? Ahora sabemos que la contestación es afirmativa, de acuerdo a la teoría de las series convergentes

3. CONDICION NECESARIA DE CONVERGENCIA

Demostraremos que en toda serie convergente el término general tiende a cero.

En efecto, de acuerdo a la definición de serie convergente es

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

o también

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S.$$

El límite de $S_n - S_{n-1} = u_n$, cuando $n \to \infty$ será igual a la diferencia de límites:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Por consiguiente: *Si el término general de una serie no tiende a cero, la serie no es convergente.*

Pero puede tender a cero el término general y la serie no ser convergente. Tal es lo que ocurre con la serie

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

en la cual $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ es mayor que n veces el último término: $S_n > \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$. Luego $S_n \to \infty$, a pesar de que $u_n \to 0$.

Por consiguiente la condición $u_n \to 0$ *no es suficiente* para asegurar la convergencia de la serie; en cambio es *necesaria*, vale decir se debe cumplir toda vez que la serie sea convergente.

EJERCICIOS:

Escribir el término general de las series cuyos primeros términos se dan a continuación y determinar en cuales de ellas el término general no tiende a cero:

1. $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots;$
2. $\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots;$
3. $1 + \frac{4}{3} + \frac{6}{4} + \frac{8}{5} + \cdots,$
4. $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \cdots;$
5. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots;$
6. $\frac{4}{1} + \frac{7}{2} + \frac{10}{3} + \frac{13}{4} + \cdots;$
7. $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \cdots.$
8. $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots.$

R: No tiende a 0 el término general en 3, 4, 6, y por consiguiente estas series no son convergentes. Las series 5, 7 y 8 son divergentes (como veremos más adelante), a pesar de que en ellas el término general tiende a 0.

9 Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$, cuyo término general tiende a cero cuando $n \to \infty$, es divergente.

(Multiplíquese por el conjugado del denominador de u_n y calcúlese S_n).

4. CONDICION NECESARIA Y SUFICIENTE DE CONVERGENCIA

CAUCHY estableció que la condición necesaria y suficiente para la convergencia de una serie es que la suma de p términos a partir de un cierto rango

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots + u_{n+p}$$

pueda hacerse tan pequeña como se quiera con tal de tomar n suficientemente grande, cualquiera sea p fijo.

Es fácil demostrar que la condición es *necesaria*, esto es, que si la serie es convergente se verifica la condición de Cauchy. En efecto, si es S la suma de la serie se puede escribir:

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p} = S_{n+p} - S_n = (S_{n+p} - S) - (S_n - S)$$

y puesto que $S_n \to S$; $S_{n+p} \to S$, el último miembro puede hacerse tan pequeño como se quiera con tal de tomar n suficientemente grande.

Veamos un ejemplo concreto. En la serie convergente

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots,$$

determinar n para que la suma de $p = 10$ términos sea menor que 0,001.

Para que resulte

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+10} = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+10} - \frac{1}{n+11}\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+11} < \frac{1}{1\,000},$$

habrá que tomar $n > 95$.

Si se pide que la suma de *todos* los términos de esta serie *a partir* de un u_n sea menor que 0,001, o en otros términos, si se quiere que el *resto* de la serie:

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots, \qquad [1]$$

sea menor que 0,001, debe ser $n > 999$, puesto que la suma [1] es menor que $\dfrac{1}{n+1}$.

La condición es suficiente. Sin hacer una demostración rigurosa (que puede verse en los tratados de Análisis Matemático) podemos razonar intuitivamente en la siguiente forma:

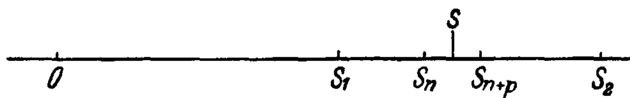


FIG. XIV-2.

Representemos con puntos de una recta las sumas parciales de la serie. Puesto que la suma $u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} = S_{n+p} - S_n$,

es tan pequeña como se quiera a partir de un valor de $n = n_0$, cualquiera sea p, resultará que *todas* las infinitas sumas S_{n+p} estarán en un entorno de S_{n_0}. Estas infinitas sumas S_{n+p} deben tender a un cierto *límite único* S, pues si hubiera dos límites S' y S'' distintos, resultaría que habría valores $S_{n'}$ y $S_{n''}$, con n' y n'' mayores que n_0, tan próximos como se quiera de S' y S'', que no cumplirían la condición $(S_{n'} - S_{n''})$ arbitrariamente pequeño, puesto que hemos supuesto que la distancia $S' - S''$ es un valor distinto de cero.

El criterio de Cauchy (1823) es muy importante por cuanto permite dar una *definición intrínseca* del límite de la sucesión S_n en base a los propios términos de la sucesión

EJERCICIOS:

1. Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ determinar el número n_0 tal que para $n > n_0$ y $p = 5$ resulte $u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} < 0{,}001$. Calcular n_0 para que el resto de la serie $(p = \infty)$ sea $< 0{,}001$.

   R: $n_0 = 15$, $n_0 = 22$.

   (Obsérvese que es $u_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$).

2. Demostrar que la serie armónica:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots,$$

   no es convergente, aplicando la condición de Cauchy.

   (La suma de los $(n^2 - n)$ términos decrecientes a partir del $(n+1)$-simo:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2},$$

   no puede hacerse tan pequeña como se quiera. En efecto, siendo cada uno de estos términos mayor que el último, será la suma mayor que $(n^2 - n)\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}$ y esta expresión, para n suficientemente grande es muy próxima a 1 y por consiguiente no puede hacerse arbitrariamente pequeña)

5. SERIES DE TERMINOS POSITIVOS

Si en la definición general de serie y de suma de una serie se consideran solamente términos positivos, se tienen las series de términos positivos.

En este caso resultarán series convergentes y series divergentes, pero nunca se tendrán series oscilantes, puesto que la sucesión S_n de

las sumas parciales cuando $n \to \infty$ tenderá a un valor finito o a un valor infinito.

EJEMPLOS:

1°) Sea $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$.

La suma parcial

$$S_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!},$$

se puede escribir

$$S_n = \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

y el límite de S_n cuando $n \to \infty$ es $S = 1$.

2°) Sea la serie

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Consideremos las primeras sumas parciales

$$S_1 = 1,$$

$$S_2 = 1 + 1 = 2.$$

$$S_3 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} = 2{,}5.$$

$$S_4 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = 2{,}667.$$

$$S_5 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = 2.708,$$

. . . .

Es evidente que las sumas parciales

$$S_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!},$$

crecen con n, por tratarse de números positivos Pero, ¿crecen estas sumas por encima de todo límite? Veremos que no.

Comparemos S_n con la suma

$$\sigma_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

en la cual cada término es mayor o igual que el correspondiente término de S_n. Pero σ_n es (dejando de lado el primer término 1) una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$ y por consiguiente su suma es siempre menor que la suma de la serie geométrica correspondiente· $\sigma_n < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$.

Por lo tanto de S_n sabemos que es una sucesión creciente y además que se mantiene inferior a 3. *Admitiremos que toda sucesión creciente y acotada tiene un límite finito.*

Gráficamente



FIG. XIV-3.

El límite de S_n, o sea la suma de la serie propuesta, es el célebre número e que aparece en multitud de problemas de matemática:

$$e = 2{,}71828\,18284\,59045\ldots$$

(Se trata de un número irracional, como hemos mostrado en la página 256; por ello su expresión decimal contiene infinitas cifras no periódicas).

6. CRITERIOS DE COMPARACION

I) *Convergencia.*

Hemos demostrado la convergencia de la serie del número e comparándola con otra serie, también de términos positivos, que tienen sus términos respectivamente mayores y que es convergente. El procedimiento se puede aplicar a cualquier serie de términos positivos.

Si los términos de una serie de términos positivos son respectivamente menores o iguales que los de una serie de términos positivos que se sabe que es convergente, la primera serie es también convergente. En efecto, sea $u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$, una serie de términos positivos cuya convergencia se quiere estudiar y

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots,$$

una serie de términos positivos de la cual se sabe que es convergente; sea además $u_n < a_n$, a partir de un cierto valor de n.

Si las sumas parciales son

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n,$$

$$A_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n,$$

resulta, por ser $u_n \leqslant a_n$, $S_n \leqslant A_n$ y $\lim_{n\to\infty} S_n \leqslant \lim_{n\to\infty} A_n = A$, si designamos con A la suma de la serie que sirve de punto de comparación.

En virtud del principio que hemos admitido anteriormente de que toda sucesión creciente y acotada tiene un límite, resulta que la sucesión S_n (que es creciente porque está constituída por sumandos

positivos y acotada porque es inferior a A) tiene un límite $S \leqslant A$, o en otros términos la serie es *convergente.*

EJEMPLOS:

1°) La serie $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$ es convergente, pues sus términos son respectivamente menores que los de la serie convergente (ya estudiada en la pág. 498),

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots$$

pues $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$ dado que es $n^2 > n^2 - n$.

2°) La serie

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} + \frac{1}{8^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

es convergente si es $p > 1$. En efecto, sus términos son respectivamente menores (o iguales) que los de la serie cuya suma parcial es (para $n = 2^r - 1$)

$$\sigma_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{8^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}$$

que se puede escribir

$$\sigma_n = 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \frac{8}{8^p} + \cdots + \frac{2^m}{(2^m)^p} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}} + \frac{1}{8^{p-1}} + \cdots + \frac{1}{(2^m)^{p-1}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{2(p-1)}} + \frac{1}{2^{3(p-1)}} + \cdots + \frac{1}{2^{m(p-1)}} =$$

$$= 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^m$$

si se designa con q el valor $\frac{1}{2^{p-1}}$. La última expresión es una progresión geométrica y la serie correspondiente es convergente si $|q| < 1$. Como $q = \frac{1}{2^{p-1}}$, resultará su valor menor que 1 sólo si $p > 1$, y el teorema queda demostrado.

II) *Divergencia.*

En correspondencia con el criterio de comparación para establecer la convergencia de una serie de términos positivos, existe un criterio para establecer la divergencia.

Si los términos de una serie de términos positivos son respectivamente mayores o iguales que los de una serie de términos positivos que se sabe que es divergente, la primera serie es también divergente.

EJEMPLO

La serie armónica

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots$$

es divergente. En efecto, sus términos son respectivamente mayores o iguales que los de la serie

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}+\cdots,$$

(en la cual aparecen sólo términos del tipo $\frac{1}{2^n}$).

Esta última serie es evidentemente divergente pues resulta

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\to\infty.$$

OBSERVACIÓN: Las series del tipo $\frac{1}{n^p}$, llamadas *series p*, son convergentes si es $p > 1$ y divergentes si es $p \leqslant 1$. Si p es un poco mayor que 1, por ejemplo $p = 1{,}0001$ la serie es convergente mientras que para $p = 1$ la serie es divergente. Esto se explica observando que las series para $p > 1$ son todas convergentes pero su suma es cada vez mayor a medida que p se acerca al valor 1, de modo que la suma se hace infinita cuando es $p = 1$.

OTRAS FORMAS DE LOS CRITERIOS DE COMPARACIÓN: Aplicando los criterios de comparación resultan las siguientes reglas de aplicación muy sencilla:

I) Sea $\sum\frac{1}{c_n}$ una serie convergente. Si

$$\lim_{n\to\infty}(c_n a_n) = L,$$

siendo L un número finito, es $\sum a_n$ convergente.

Es suficiente observar que resulta $a_n < \frac{L'}{c_n}$ siendo L' un número finito mayor que L y entonces puede aplicarse el criterio de comparación.

II) Sea $\sum\frac{1}{d_n}$ una serie divergente. Si

$$\lim_{n\to\infty}(d_n a_n) = L > 0$$

la serie $\sum a_n$ es divergente.

Eligiendo $0 < K < L$ será $a_n > \frac{K}{d_n}$.

Ejemplos.

1°) La serie $\sum \frac{1}{n^2+1}$ es convergente como se ve eligiendo $c_n = n^2$, con lo que resulta $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 =$ número finito.

2°) La serie $\sum \frac{1+n}{1+n^2}$ es divergente pues si $d_n = n$ se tiene $\frac{1+n}{1+n^2} \cdot n \to 1 > 0$.

Ejercicios

1. Demostrar que si $\sum u_n$ es convergente, $\sum u_n{}^2$ y $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ son convergentes.

Teniendo en cuenta que la serie armónica diverge, que la serie-p converge para $p > 1$ y diverge para $p \leqslant 1$ y que la serie geométrica converge o diverge para $q < 1$, $q \geqslant 1$, respectivamente, determinar el comportamiento de las series siguientes, aplicando el criterio de comparación.

2. $\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2^5}} + \frac{1}{\sqrt{3^5}} + \frac{1}{\sqrt{4^5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^5}} + \cdots$ (C)

3. $\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} + \cdots$ (D)

4. $\frac{3}{1} + \frac{3}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \cdots + \frac{3}{2^n} + \cdots$ (C)

5. $\frac{2}{1\cdot 2} + \frac{2}{2\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{2}{n(n+1)} + \cdots$ (C)

6. $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{4n} + \cdots$ (D)

7. $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{n+4} + \cdots$ (D)

8. $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{2^n+3} + \cdots$ (C)

9. $\frac{1}{5} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \frac{1}{\sqrt[4]{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[n]{5}} + \cdots$ (D)

10. $\frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{65} + \cdots + \frac{1}{n^3+1} + \cdots$ (C)

11. $\frac{1}{2!} + \frac{2}{4!} + \frac{2^2}{6!} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{(2n)!} + \cdots$ (C)

12. $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \cdots + \frac{1}{\ln n} + \cdots$ (D)

13. $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{5}{10} + \frac{7}{17} + \cdots + \frac{2n-1}{n^2+1} + \cdots$ (D)

14. $-1-7+\frac{5}{2}+\frac{13}{9}+\cdots+\frac{3n+1}{n^2-5}+\cdots.$ (D)

15 $2+\frac{5}{8}+\frac{10}{27}+\frac{17}{64}+\cdots+\frac{n^2+1}{n^3}+\cdots.$ (D)

16. $\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}+\cdots+\frac{\ln n}{n}+\cdots.$ (D)

17. $\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{21}+\cdots+\frac{1}{7n}+\cdots.$ (D)

18. $-1+2+\frac{1}{2}+\frac{2}{7}+\cdots+\frac{2}{3n-5}+\cdots.$ (D)

19. $\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{14}+\frac{1}{21}+\cdots+\frac{1}{n^2+5}+\cdots.$ (C)

20. $\frac{1}{9}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^2}+\cdots.$ (C)

21. $0+\frac{1}{8}+\frac{2}{27}+\cdots+\frac{n-1}{n^3}+\cdots.$ (C)

22. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{5}}+\frac{1}{3\sqrt{10}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}+\cdots.$ (C)

23. $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}+\cdots.$ (D)

24. $4+\frac{8}{17}+\frac{12}{626}+\cdots+\frac{4n}{1+n^4}+\cdots.$ (C)

25 $\frac{1}{3}+\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2+\sqrt{n}}+\cdots.$ (D)

26. $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{27}+\frac{1}{256}+\cdots+\frac{1}{n^n}+\cdots.$ (C)

Mediante la descomposición en fracciones, verificar las sumas de las series siguientes

27. $\sum_1^\infty \frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}.$

28 $\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+2)}=\frac{3}{4}.$

29 $\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}.$

30 $\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+2)(n+4)}=\frac{11}{96}.$

31 $\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{18}.$

32 (Generalización del ejercicio anterior)

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} = \frac{1}{k\cdot k!}.$$

Observación. Ténganse en cuenta las relaciones:

$$\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right];$$

$$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right];$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right];$$

$$\frac{1}{n(n+2)(n+4)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+2)}-\frac{1}{(n+2)(n+4)}\right];$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{n(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right].$$

Convergencia y divergencia: En el estudio de las series hay dos cuestiones distintas: una es saber con certeza si la serie es convergente o no y otra es calcular la suma de la serie.

Desde el punto de vista teórico la primera cuestión es la más importante, porque hasta tanto no se haya demostrado la convergencia de una serie no se puede operar con los términos de la serie sin correr el riesgo de llegar a resultados absurdos.

Una vez que se ha demostrado la convergencia de una serie se podrá tener un valor tan próximo como se quiera de la suma de la serie con tal de tomar un número suficientemente grande de términos. (Sobre este punto y enfocando la cuestión desde el punto de vista del cálculo numérico volveremos en la pág. 572).

Ya hemos estudiado algunos criterios que permiten decidir sobre la convergencia o divergencia de una serie de términos positivos comparando sus términos con los de otras series de convergencia o divergencia conocidas. Ahora estableceremos otros criterios en los que se emplean exclusivamente términos de la serie dada.

7. CRITERIOS DE CONVERGENCIA: D'ALEMBERT, CAUCHY, KUMMER Y RAABE

La comparación de una serie de términos positivos con una serie geométrica permite establecer los criterios de D'Alembert y Cauchy.

Criterio de D'Alembert: En una serie de términos positivos

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

se calcula

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}}=L.$$

Si es $L<1$, la serie es convergente; si es $L>1$, la serie es diver-

gente. Si $L = 1$, este criterio no permite decidir sobre la convergencia o divergencia de la serie.

Demostración:

a) *Convergencia:* Puesto que es el $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = L < 1$, si se adopta

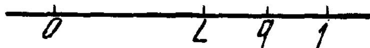


FIG. XIV-4.

un valor q mayor que L pero menor que 1, será

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} < q$$

desde un valor de n en adelante, por ejemplo desde $m + 1$. (Para algunos valores de n podrá ser $\frac{u_n}{u_{n-1}} > q$).

Entonces será

$$u_{m+1} < q \cdot u_m,$$
$$u_{m+2} < q \cdot u_{m+1} < q^2 u_m,$$
$$u_{m+3} < q \cdot u_{m+2} < q^3 u_m,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$u_n < q^{n-m} u_m,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Por consiguiente los términos de la serie $u_{m+1} + u_{m+2} + \dots + u_n + \dots$, serán menores que los de la serie geométrica $u_m(q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-m} + \dots)$. Esta serie por ser geométrica y de razón $q < 1$, será convergente. El criterio de convergencia queda así demostrado.

b) *Divergencia:* En el caso $L > 1$, se demuestra la divergencia observando que desde un valor de n en adelante, por ejemplo desde $m + 1$, es $\frac{u_n}{u_{n-1}} > 1$ y por consiguiente la serie $u_{m+1} + u_{m+2} + \dots + u_n + \dots$ es mayor que la serie $u_m + u_m + u_m + \dots$, evidentemente divergente.

EJEMPLOS:

1°) La serie

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

tiene como término general $u_n = \frac{1}{n!}$ y por consiguiente es

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n-1)!}} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \to 0.$$

Siendo $L = 0$, la serie es convergente.

2°) La serie

$$\frac{1!}{100} + \frac{2!}{100^2} + \frac{3!}{100^3} + \cdots$$

tiene como término general $\frac{n!}{100^n}$. La relación

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{n!}{100^n} \cdot \frac{100^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n}{100} \to \infty.$$

Por ser $L > 1$ la serie es divergente (1).

Obsérvese cuán pequeños son los primeros términos de esta serie divergente: $0{,}01 + 0{,}0002 + 0{,}000006 + \ldots$ El centésimo término es menor que un decimal del orden 42 (es decir después de la coma hay 41 ceros que preceden al 1). Los primeros 268 términos son todos menores que la unidad pero a partir del 269° el término general ya es mayor que 1. Los términos crecen entonces rápidamente: el término de orden 500 es aproximadamente $1{,}22 \times 10^{134}$.

Conviene insistir sobre el hecho de que la convergencia o divergencia de una serie no depende de los primeros términos, *sino* del término general.

Observación: Nótese que el criterio de D'Alembert exige que el límite L sea menor que 1, no siendo suficiente que la razón $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ se mantenga constantemente menor que 1. En efecto, en el caso de la serie armónica ese cociente es $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ y a pesar de ser menor que 1, la serie es *divergente*. Pero el criterio, bien aplicado, no asegura nada en este caso pues resulta $L = 1$, esto es, se trata del caso dudoso.

Ejercicios:

Aplicando el criterio de D'Alembert indicar si las series de las cuales damos el término general u_n, convergen o divergen:

1. $3 : 2^n$;	2. $2^n : 3$;	3. $3 : 10^n$;
4. $2^n : n!$;	5. $\frac{1}{5^{n-1}} \frac{3^{n-1}}{n^2}$;	6. $n\,2^n : 3^n$;
7. $3^n : n\,2^n$;	8. $9^n : n!$;	9. $n! : (2n)!$;

(1) En realidad no hace falta aplicar ningún criterio para demostrar la divergencia de esta serie, basta observar que el término general no tiende a cero.

10. $(n^2+1):4^n$; 11. $(2n+1):5^n$; 12. $\dfrac{4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n+1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$;

13. $1:n^p$.

R: Son todas convergentes excepto 2 y 7. Para 13 este criterio no permite asegurar nada, tanto para $p>1$, como para $p\leqslant 1$, a pesar que en el primer caso es convergente y en el segundo divergente.

Determinar la convergencia o divergencia de las series:

14. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}+\cdots$. (C)

15. $\dfrac{2}{2^{100}}+\dfrac{2^2}{3^{100}}+\dfrac{2^3}{4^{100}}+\cdots+\dfrac{2^n}{(n+1)^{100}}+\cdots$. (D)

16. $\dfrac{2!}{1\,000}+\dfrac{3!}{1\,000^2}+\dfrac{4!}{1\,000^3}+\cdots+\dfrac{(n+1)!}{1\,000^n}+\cdots$. (D)

17. $\dfrac{3}{3}+\dfrac{4}{3^2}+\dfrac{5}{3^3}+\cdots+\dfrac{n+2}{3^n}+\cdots$. (C)

18. $\dfrac{4}{5}+2\left(\dfrac{4}{5}\right)^2+3\left(\dfrac{4}{5}\right)^3+\cdots+n\left(\dfrac{4}{5}\right)^n+\cdots$. (C)

19. $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1\cdot 2}{1\cdot 3}+\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}+\cdots$. (C)

20. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dfrac{1}{5\cdot 6}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)2n}+\cdots$. (C)

21. $\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4^2}+\dfrac{5}{4^3}+\dfrac{7}{4^4}+\cdots+\dfrac{2n-1}{4^n}+\cdots$. (C)

22. $\dfrac{1}{3\cdot 2}+\dfrac{1}{4\cdot 2^2}+\dfrac{1}{5\cdot 2^3}+\cdots+\dfrac{1}{(n+2)2^n}+\cdots$. (C)

23. $\dfrac{1}{1}+\dfrac{2\cdot 2!}{5}+\dfrac{2^2 3!}{10}+\cdots+\dfrac{2^{n-1}n!}{n^2+1}+\cdots$. (D)

24. $\dfrac{4}{5}+\dfrac{5}{5^2}+\dfrac{6}{5^3}+\cdots+\dfrac{n+3}{5^{n-1}}+\cdots$. (C)

25. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1\cdot 3}{3\cdot 6}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}+\cdots+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{3\cdot 6\cdot 9\cdots 3n}+\cdots$. (C)

26. $\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{5!}+\dfrac{1}{7!}+\cdots+\dfrac{1}{(2n+1)!}+\cdots$. (C)

27. $\dfrac{2\cdot 3}{1!}+\dfrac{3\cdot 4}{2!}+\dfrac{4\cdot 5}{3!}+\cdots+\dfrac{(n+1)(n+2)}{n!}+\cdots$. (C)

28. $\dfrac{4!}{3!1!3}+\dfrac{5!}{3!2!3^2}+\cdots+\dfrac{(n+3)!}{3!n!3^n}+\cdots$. (C)

29. $\dfrac{10}{1!}+\dfrac{10^2}{2!}+\dfrac{10^3}{3!}+\cdots+\dfrac{10^n}{n!}+\cdots$. (C)

30. $\frac{1}{1}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\cdots+\frac{n!}{n^n}+\cdots.$ (C)

31. $\frac{1}{2}+\frac{4}{2^2}+\frac{9}{2^3}+\cdots+\frac{n^2}{2^n}+\cdots.$ (C)

32. $\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2^2}{2\cdot 3}+\frac{2^3}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{2^n}{n(n+1)}+\cdots.$ (D)

33. Demostrar la divergencia de la serie

$$\frac{1!}{10}+\frac{2!}{10^2}+\frac{3!}{10^3}+\cdots = 0{,}1+0{,}02+0{,}006+\cdots.$$

(Verifíquese que los términos van disminuyendo de valor hasta el décimo, que es aproximadamente 0,00036 y que los 24 primeros términos son menores que la unidad).

Criterio de Cauchy: En una serie de términos positivos

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

se calcula

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=L.$$

Si es $L<1$, la serie es convergente; si es $L>1$, la serie es divergente. Si es $L=1$, este criterio no permite decidir sobre la convergencia o divergencia de la serie.

Demostración:

a) *Convergencia:* Puesto que es $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=L<1$, si se adopta un valor q mayor que L pero menor que 1, será

$$\sqrt[n]{u_n}<q$$

desde un valor de n en adelante, por ejemplo a partir del m-simo. (Para algunos valores de n podrá ser $\sqrt[n]{u_n}>q$).

Entonces será

$$\sqrt[m]{u_m}<q \qquad \text{o sea} \qquad u_m<q^m,$$

$$\sqrt[m+1]{u_{m+1}}<q \qquad \text{o sea} \qquad u_{m+1}<q^{m+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sqrt[n]{u_n}<q \qquad \text{o sea} \qquad u_n<q^n.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Sumando ordenadamente se ve que los términos de la serie

$$u_m+u_{m+1}+\ldots+u_n+\ldots,$$

son respectivamente inferiores a $q^m(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-m} + \ldots)$ y puesto que esta última es una serie convergente por ser geométrica y de razón $q < 1$, la serie dada es convergente por el criterio de comparación.

b) *Divergencia:* Si $L > 1$, será a partir de un índice m, $\sqrt[n]{u_n} > 1$, es decir $u_m > 1$; $u_{m+1} > 1$; ... y la serie $u_m + u_{m+1} + \ldots$ tendrá sus términos mayores que los de la serie divergente $1 + 1 + 1 + \ldots$

EJEMPLOS.

1º) Sea la serie $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots$. Siendo el término general $\frac{1}{n^n}$ es. $\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{n} \to 0$. La serie es convergente.

2º) La serie $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^4} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5} + \cdots$, de término general $\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}$ es convergente pues $\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2\sqrt[n]{n}} \to \frac{1}{2}$ y resulta $L < 1$.

EJERCICIOS:

Aplíquese el criterio de Cauchy para determinar si las siguientes series convergen o divergen:

1 $\quad 1 + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1} + \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{n}\right)^n + \cdots$ (C)

2. $\quad 1 + \frac{1}{(\lg 2)^2} + \frac{1}{(\lg 2)^3} + \cdots + \frac{1}{(\lg n)^n} + \cdots$ (C)

3. $\quad 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^9 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2} + \cdots$ (C)

Para qué valores de r convergen las series cuyos términos generales se indican:

4 $\quad \left(\frac{nr}{n+1}\right)^n$

5. $\quad \frac{[(n+1)r]^n}{n^{n+1}}$.

R: $r < 1$.

OBSERVACIÓN: Se puede demostrar que siempre que exista límite de $\sqrt[n]{a_n}$ cuando $n \to \infty$, existe y es el mismo, el límite del cociente $\frac{a_n}{a_{n-1}}$, mientras que la recíproca no es cierta.

Así verifíquese que la serie

$$a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \cdots$$

con $0 < a < b < 1$, es convergente de acuerdo al criterio de Cauchy, mientras que el cociente de dos términos sucesivos no tiende a un límite pues $\frac{u^{2n+1}}{u_{2n}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} \to \infty$, y $\frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} = a \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} \to 0$, si se considera que el primer término es u_0.

Podría parecer entonces que el criterio de D Alembert es inútil por estar contenido en el de Cauchy Sin embargo, muchas veces es más fácil aplicar el criterio de D'Alembert que el de Cauchy.

CRITERIO DE KUMMER: Consideremos una serie de términos positivos $\sum u_n$. Sea $\sum \frac{1}{D_n}$ una serie divergente y formemos la expresión

$$T_n = D_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - D_{n+1}.$$

Calculemos $\lim_{n\to\infty} T_n = L$.

Si es $L > 0$, la serie $\sum u_n$ es convergente y

si es $L < 0$, la serie $\sum u_n$ es divergente.

En efecto, si es $L > 0$ y consideramos un valor K comprendido entre 0 y L, a partir de un cierto valor m se verificará que es $T_n > K$,



FIG. XIV-5.

es decir

$$D_n u_n - D_{n+1} u_{n+1} > K u_{n+1}, \qquad \text{para todo } n > m.$$

Haciendo $n = m.\ m + 1,\ m + 2, \ldots$, resulta sucesivamente:

$$D_m u_m - D_{m+1} u_{m+1} > K u_{m+1},$$

$$D_{m+1} u_{m+1} - D_{m+2} u_{m+2} > K u_{m+2},$$

$$D_{m+2} u_{m+2} - D_{m+3} u_{m+3} > K u_{m+3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_n u_n - D_{n+1} u_{n+1} > K u_{n+1}.$$

Sumando ordenadamente y simplificando resultará

$$D_m u_m - D_{n+1} u_{n+1} > K\,(u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_{n+1})$$

o sea

$$u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_{n+1} < \frac{D_m u_m - D_{n+1} u_{n+1}}{K} < \frac{D_m u_m}{K}.$$

Esta expresión $\frac{D_m u_m}{K}$ es independiente de n y por consiguiente la suma del primer miembro que es de términos positivos y creciente con n, está acotada y tendrá un límite finito. La serie es entonces *convergente*.

Para demostrar la divergencia en el caso de ser $L < 0$, basta observar que a partir de un cierto valor m' será

$$D_n u_n < D_{n+1} u_{n+1}, \qquad \text{si es } n \geqslant m'$$

o sea que todos los productos $D_n u_n$ con $n > m'$ son superiores a $D_{m'} u_{m'}$.

Siendo $D_n u_n > D_{m'} u_{m'}$, es $\sum u_n > D_{m'} u_{m'} \sum \frac{1}{D_n}$

y en virtud del criterio de comparación es $\sum u_n$ divergente, por serlo por hipótesis la serie del 2° miembro.

CRITERIO DE RAABE: Si en el criterio de Kummer elegimos $D_n = n$, resulta

$$T_n = n \frac{u_n}{u_{n+1}} - (n + 1) = n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1.$$

Si $T_n \to L$, $\qquad R_n = n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = T_n + 1 \to L + 1$

y resulta de acuerdo al criterio anterior que la serie es convergente si es $L > 0$ y divergente si es $L < 0$; o lo que es lo mismo, si

$$\lim_{n\to\infty} R_n > 1, \qquad \text{la serie es convergente;}$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n < 1, \qquad \text{la serie es divergente.}$$

APLICACIÓN DEL CRITERIO DE RAABE: Para aplicar el criterio de Raabe hay que empezar por formar el cociente $\frac{u_n}{u_{n+1}}$. Si el límite de este cociente es distinto de 1, la serie será convergente o divergente según que sea mayor o menor que 1, respectivamente. Obsérvese que en la formulación del criterio de Raabe consideramos la relación entre un término y el siguiente en vez de tomar el cociente entre un término y el anterior como lo prescribe el criterio de D'Alembert. Sólo si el límite del cociente es 1 se aplica Raabe restando de la expresión $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ el valor 1 y multiplicando todo por n. Si este nuevo límite es mayor que 1, la serie converge; si es menor que 1 diverge y si es igual a 1 habrá que aplicar otro criterio para decidir sobre su convergencia.

Así en la serie

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n + 1)} + \cdots,$$

resulta

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{n(n + 1)} : \frac{1}{(n + 1)(n + 2)} = \frac{n + 2}{n} \to 1.$$

Como el criterio de D'Alembert *no* permite afirmar nada, aplicamos el criterio de Raabe:

$$R_n = n\left(\frac{n+2}{n} - 1\right) = \frac{2n}{n} \to 2.$$

Por ser este límite mayor que 1, la serie es *convergente.*

EJERCICIOS.

Indicar si las siguientes series convergen o divergen:

1. $\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} + \cdots$ (D)

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^3 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}\right)^3 + \cdots.$ (C)

3. $\frac{1}{2^2 - a} + \frac{1}{3^2 - a} + \frac{1}{4^2 - a} + \cdots + \frac{1}{n^2 - a} + \cdots$ (C)

Aplicando el criterio de Raabe determinar si las series cuyo término general es u_n, convergen o divergen:

4. $u_n = \frac{1}{(2n-1)2n}$; 5. $u_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{4 \cdot 5 \cdots (4 + n - 1)}$.

R. Convergen.

6. Mostrar que la serie

$$1 + \frac{1+\alpha}{1+\beta} + \frac{(1+\alpha)(2+\alpha)}{(1+\beta)(2+\beta)} + \cdots$$

es convergente o divergente según que sea $\beta \gtrless 1 + \alpha$ respectivamente.

8. CRITERIO DE LA INTEGRAL DE CAUCHY

Sea

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \qquad [1]$$

una serie de *términos positivos y decrecientes.*

Consideremos una función $f(x)$ tal que sea $f(n) = u_n$. [Así por ejemplo para la serie $\sum \frac{1}{n}$ es $f(x) = \frac{1}{x}$; para $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ es $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$].

Demostraremos que la serie converge o diverge al mismo tiempo que la integral

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)\, dx.$$

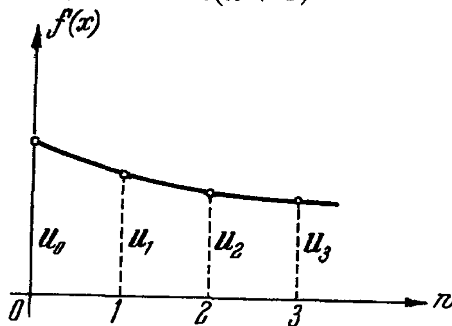


FIG. XIV-6.

Dado el carácter decreciente de los términos de la serie de términos positivos será:

$$u_{n-1} \geqslant f(x) \geqslant u_n > 0.$$

Integrando en el intervalo $(n - 1, n)$ resultará:

$$\int_{n-1}^{n} u_{n-1}\, dx \geqslant \int_{n-1}^{n} f(x)\, dx \geqslant \int_{n-1}^{n} u_n\, dx.$$

Pero tanto u_{n-1} como u_n son valores numéricos que se pueden sacar fuera del signo integral y como es $\int_{n-1}^{n} dx = \Big[x\Big]_{n-1}^{n} = n - (n - 1) = 1$, resulta:

$$u_{n-1} \geqslant \int_{n-1}^{n} f(x)\, dx \geqslant u_n. \qquad [2]$$

Escribiendo las relaciones correspondientes a estas desigualdades para $n = 1, 2, 3, \ldots, n$ y sumando resulta:

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} \geqslant \int_{0}^{1} f(x)\, dx + \int_{1}^{2} f(x)\, dx + \ldots +$$

$$+ \int_{n-1}^{n} f(x)\, dx \geqslant u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

La suma de las integrales es $\int_{0}^{n} f(x)\, dx = I_n$. Además, designando con S_n la suma de los $(n + 1)$ términos: $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$, se puede escribir la última relación en la forma:

$$S_n - u_n \geqslant I_n \geqslant S_n - u_0,$$

o lo que es lo mismo (restando de $S_n = S_n = S_n$),

$$u_0 \geqslant S_n - I_n \geqslant u_n > 0.$$

La sucesión $(S_n - I_n)$ está acotada entre dos valores finitos: 0 y u_0 y además es decreciente pues

$$(S_n - I_n) - (S_{n-1} - I_{n-1}) = (S_n - S_{n-1}) - (I_n - I_{n-1}) =$$

$$= u_n - \int_{n-1}^{n} f(x)\, dx$$

y la última diferencia es negativa de acuerdo a [2].

Siendo $(S_n - I_n)$ una sucesión decreciente y acotada tiene un límite finito comprendido entre 0 y u_0, de modo que se cumplirá

$$u_0 \geqslant \lim_{n\to\infty} (S_n - I_n) \geqslant 0. \qquad [3]$$

Por consiguiente la suma S_n de los $(n + 1)$ primeros términos de la serie tiende a un valor finito o infinito conjuntamente con I_n, o en otros términos la serie [1] converge o diverge conjuntamente con $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\, dx$, donde n_0 es el índice del primer término de la serie.

Este criterio de Cauchy permite dar un valor aproximado de la suma de la serie [1] en el caso de convergencia y acotar la diferencia $(S_n - I_n)$ en el caso de divergencia.

EJEMPLOS:

1°) La serie $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$ es convergente pues siendo $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$ resulta:

$$I_n = \int_1^n \frac{dx}{x(x+1)} = \left[\ln \frac{x}{x+1}\right]_1^n = \ln \frac{n}{n+1} + \ln 2 \to \ln 2 \cong 0{,}69.$$

Luego la serie es convergente y su suma S comprendida entre

$$I < S < I + u_0,$$

resulta en este caso $0{,}69 < S < 1{,}19$.

El valor exacto es $S = 1$.

2°) La serie armónica $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ es *divergente* pues siendo $f(x) = \frac{1}{x}$ resulta $I_n = \int_1^n f(x)\,dx = \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n \to \infty$, cuando $n \to \infty$.

Además como es

$$1 \geqslant \lim_{n\to\infty} (S_n - I_n) \geqslant 0$$

resulta en este caso $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = C$, siendo C la célebre constante de *Euler* cuyo valor es 0,57721566490. ., número que aparece en muchas cuestiones de matemática superior.

NOTA: Es muy sorprendente la divergencia de la serie armónica que ya conocían MENGOLI (1650) y J. BERNOUILLI (1689). Aplicando el resultado del ejemplo 2° se ve que sumando mil términos la suma parcial no alcanza el valor 8, que sumando un millón de términos no llega al valor 15, un billón al valor 30 y aún sumando 10^{100} términos no llega a 232. Pese a todo esto se puede lograr que las sumas parciales de un número suficientemente grande de términos superen a cualquier número por grande que sea.

EJERCICIOS:

Aplicando el criterio de la integral de Cauchy indicar si las series cuyo término general es u_n convergen o divergen.

1. $u_n = \frac{2}{n^2}$ (C)

2. $u_n = \frac{5}{n^4}$ (C)

3. $u_n = \frac{2}{2n+1}$ (D)

4. $u_n = \frac{3}{n^{3/2}}$ (C)

5. $u_n = \frac{1}{(2n+1)^3}$ (C)

6. $u_n = \frac{1}{2n+3}$ (D)

7. $u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ (D)   8. $u_n = \frac{1}{(4n+1)^{3/2}}$ (C)

9 $u_n = \frac{2n}{(n^2+1)^3}$ (C)   10. $u_n = \frac{5}{\sqrt{n}}$ (D)

11. $u_n = \frac{1}{n^2+1}$ (C)   12. $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$ (C)

13. $u_n = e^{-n}$ (C)   14 $u_n = 2^{-n}$ (C)

15 $u_n = \frac{2n}{n^2+1}$ (D)   16 $u_n = \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ (D)

17. Aplíquese el criterio de la integral de Cauchy a la serie

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 6} + \frac{1}{4\cdot 8} + \cdots + \frac{1}{n\cdot 2n} + \cdots.$$

(Calcúlese un valor aproximado para la suma de los n primeros términos y compárese con el valor exacto $\frac{\pi^2}{12}$).

18. Idem con la serie

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots$$

cuya suma es $\frac{\pi^2}{8}$.

19. Representar gráficamente la función $\frac{1}{x}$ y señalar los valores correspondientes a las abscisas enteras. Interpretar geométricamente la constante C de Euler.

20. Demostrar la divergencia de la serie

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+3b} + \cdots$$

con a y b positivos.

21. Estudiar la convergencia o divergencia de la serie

$$\frac{1}{2(\log 2)^p} + \frac{1}{3(\log 3)^p} + \frac{1}{4(\log 4)^p} + \cdots +$$
$$+ \frac{1}{(n+1)[\log (n+1)]^p} + \cdots.$$

R: Para $p > 1$ la serie es convergente.

Para $p \leqslant 1$ la serie es divergente.

SERIES E INTEGRALES: El criterio de Cauchy muestra una de las múltiples analogías que existen entre las series y las integrales con límite superior de integración infinito.

Hay sin embargo una diferencia que conviene destacar. Mientras que en toda serie $\sum u_n$ convergente, el término general u_n tiende a 0 cuando $n \to \infty$, hay integrales $\int_0^\infty f(x)\,dx$ convergentes en las cuales $f(x)$ no tiende a 0 cuando $x \to \infty$.

He aquí un ejemplo de Hardy: Sea $f(x)$ una función nula en todas partes excepto en los entornos de los puntos 1, 2, 3, .., n, ... de semiamplitud $\frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \ldots, \frac{1}{(n+1)^2}, \ldots$ en donde toma los valores correspondientes a las rectas que alcanzan el valor 1 en los puntos de abscisa entera y positiva, tal como aparece en la figura 7.

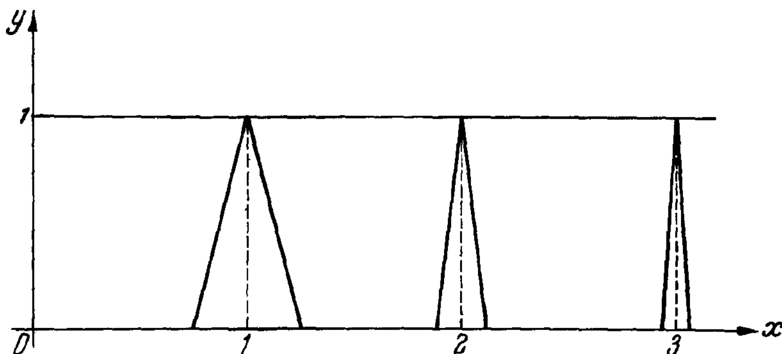


Fig. XIV-7.

Las áreas de estos triángulos constituyen los términos de la serie convergente

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

y por consiguiente la integral de 0 a ∞ es convergente. Sin embargo, $f(x)$ no tiende a 0 cuando $x \to \infty$ pues siempre es $f(n) = 1$, cualquiera sea n.

9. SERIE DE TERMINOS ALTERNADOS

Cuando en una serie los términos son positivos y negativos alternadamente:

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots, \qquad [1]$$

(donde los u_i son todos positivos) la serie se llama *alternada*.

Demostraremos que si los términos u_i son decrecientes, es decir si

$$u_{n+1} \leqslant u_n$$

y si

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

la serie [1] es *convergente* (¹).

(¹) Esta propiedad ya la conocía Leibniz en el año 1705.

En efecto, si formamos las sucesivas sumas parciales resulta que todas las de índice impar constituyen una sucesión creciente y las de índice par una sucesión decreciente:

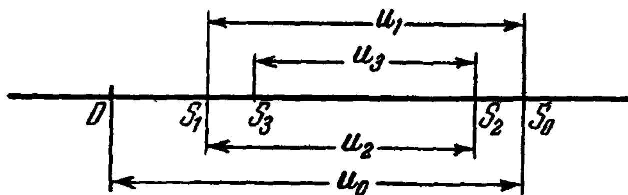


FIG. XIV-8.

$$S_{2n+1} = (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \dots + (u_{2n} - u_{2n+1}),$$
$$S_{2n} = u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4) - \dots - (u_{2n-1} - u_{2n}).$$

Todos los paréntesis son positivos puesto que los términos u_n son decrecientes y por tanto a medida que n crece, S_{2n+1} aumenta y S_{2n} disminuye. Además

$$S_{2n} = S_{2n-1} + u_{2n} > 0,$$
$$S_{2n+1} = u_0 - (u_1 - u_2) - \dots - (u_{2n-1} - u_{2n}) - u_{2n+1} < u_0.$$

Siendo $\{S_{2n}\}$ una sucesión de términos decrecientes y positivos (acotados inferiormente) debe tener un límite L y también debe tener un límite L' la sucesión $\{S_{2n+1}\}$ por ser de términos crecientes acotados superiormente. Pero como

$$S_{2n} = S_{2n+1} - u_{2n+1},$$

tomando límites en ambos miembros cuando $n \to \infty$ y teniendo en cuenta que $u_{2n+1} \to 0$, resulta $L = L' = S$:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S.$$

CÁLCULO DEL ERROR EN LAS SERIES ALTERNADAS: Las series alternadas son particularmente apropiadas para el cálculo numérico por cuanto resulta fácil de determinar una cota superior del error cometido al tomar como valor aproximado de la suma de la serie, la suma de los r primeros términos.

En efecto, hemos visto que la sucesión decreciente $\{S_{2n}\}$ y la sucesión creciente $\{S_{2n-1}\}$ tienden a un límite S que es mayor que todas las sumas de subíndice impar y menor que las de subíndice par. El error absoluto ε cometido al tomar como valor aproximado de S el valor de una suma parcial S_{2n-1} será inferior a la diferencia entre dos sumas parciales:

$$\varepsilon = |S - S_{2n-1}| < |S_{2n} - S_{2n-1}| = |u_{2n}|.$$

O en otras palabras: *El error que se comete al considerar como valor aproximado de una serie alternada convergente la suma de sus r primeros términos es menor, en valor absoluto, que el término de orden* $(r+1)$.

Además si r es *par*, la suma parcial da un valor por defecto de S y si r es *impar*, da un valor por exceso.

EJEMPLO:

La serie

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} + \cdots, \qquad [1]$$

es una serie alternada de términos decrecientes. Sumando hasta el 5º término se tendrá un valor por exceso.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = 0{,}6333$$

El error será menor que $\frac{1}{6!} < 0{,}0015$.

(Efectivamente la suma exacta de la serie es $1 - e^{-1} = 0{,}63212\ldots$).

Puede plantearse esta otra cuestión ¿cuántos términos de la serie [1] deberán considerarse para lograr su suma con 4 cifras exactas, es decir con error $< 0{,}0001$? Como es $\varepsilon < |u_n| = \frac{1}{n!}$, para que sea $\varepsilon < 0{,}0001$ será suficiente que sea $n! < 1/0{,}0001 = 10\,000$, lo cual se consigue a partir de $n = 8$. Sumando entonces 7 términos (tomados con 5 decimales exactos) se logrará la aproximación pedida.

EJERCICIOS:

1. Verificar que la serie

$$1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^6} + \cdots$$

es convergente y calcular su suma con 3 decimales exactos.

Solución: La serie es convergente pues es alternada, de términos decrecientes y con el término general tendiendo a 0. Como el error que se comete al tomar n términos es menor que $1/(n+1)^6$ deberá ser $(n+1)^6 > 10^3$, lo cual implica $n \geqslant 3$:

$$S \sim 1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} = 1 - 0{.}0156 + 0{.}0014 = 0{,}9858.$$

El *error de fórmula* originado por la consideración de 3 términos en lugar de los infinitos, es inferior a $1/4^6 \sim 0.00024 < 0.0003$. El *error de cálculo* debido a la consideración de 4 cifras decimales en los cocientes es $2 \times 0{,}0001 = 0{,}0002$. La suma de estos 2 errores es 0,0005. Al considerar en lugar de 0.9858 el valor 0,986 se comete un nuevo "error de redondeo" de 0,0002, que sumado al anterior da $0{,}0007 < 0{,}001$. Luego 0,986 es la suma aproximada de la serie con todas sus cifras exactas.

2. Verificar que la serie armónica alternada

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots,$$

es convergente y calcular su suma con una cifra exacta.

(El valor exacto de esta serie es $\ln 2$).

3. Mostrar que la serie alternada

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{8}+\cdots$$

cuyo término general tiende a cero, es *divergente*. ¿Está en contradicción este resultado con el teorema sobre series alternadas?

Solución: Para mostrar que la serie es divergente es suficiente observar que la serie de los términos positivos es convergente, mientras que la serie de los términos negativos (que es del tipo de la serie armónica) es divergente.
Esto no implica contradicción con el teorema general pues los términos de la serie no son decrecientes.

Verificar que las siguientes series alternadas convergen:

4. $\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{3^n}+\cdots.$

5 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+\cdots.$

6. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots.$

7. $\frac{1}{2}-\frac{2}{5}+\frac{3}{10}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}+\cdots.$

8. $1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n^4}+\cdots.$

9. $1-\frac{1}{(2!)^2}+\frac{1}{(3!)^2}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(n!)^2}+\cdots.$

10. $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\cdots.$

(Nótese que la suma parcial de $2n$ términos está formada por las dos sumas de n términos

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+\cdots,$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n}+\cdots,$$

ambas convergentes).

Verificar que las siguientes series alternadas divergen:

11. $1-\frac{3}{4}+\frac{4}{6}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{2n}+\cdots.$

12. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[n]{2}}+\cdots.$

13. $\frac{1}{2}-\frac{2}{5}+\frac{3}{8}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{n}{3n-1}+\cdots.$

14. $\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}-\cdots+(-1)^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n}}+\cdots.$

10. SERIE DE TERMINOS CUALESQUIERA

Convergencia absoluta y condicional: Hemos considerado hasta ahora series de términos positivos y series alternadas; en lo que sigue estudiaremos series cuyos términos pueden ser positivos o negativos sin ningún orden especial.

Claro está que el número de términos positivos y negativos en estas series debe ser infinito porque en la determinación de la convergencia o divergencia no influye un número finito de términos ya que la suma (algebraica) de esos términos es un valor finito.

Diremos que una serie $\sum u_n$ es *absolutamente convergente* si es convergente la serie de términos positivos $\sum |u_n|$ donde se ha considerado en lugar de cada término el correspondiente valor absoluto.

Si la serie $\sum u_n$ es convergente y la serie $\sum |u_n|$ es divergente la serie se dice *condicionalmente convergente.*

La serie

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots$$

es absolutamente convergente porque la serie de los valores absolutos correspondientes es una serie geométrica convergente.

La serie

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

es condicionalmente convergente, porque si bien es convergente (se trata de una serie alternada, de términos decrecientes con $u_n \to 0$), la serie de los valores absolutos es divergente (serie armónica).

Ejercicio:

Indicar cuáles de las series alternadas convergentes de los ejercicios 4-10 del parágrafo anterior, convergen absolutamente.

R: 1; 8; 9.

Teorema I: Si una serie es absolutamente convergente, es convergente. Es decir, si $\sum |u_n|$ [1] converge, $\sum u_n$ [2] converge.

Si la serie de los valores absolutos converge, de acuerdo a la condición necesaria y suficiente estudiada en la página 505, la suma

$$|u_n| + |u_{n+1}| + \ldots + |u_{n+p}|, \quad [3]$$

puede hacerse tan pequeña como se quiera con tal de considerar n suficientemente grande. Pero la expresión correspondiente de [2]

$$|u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| \quad [4]$$

que es menor o igual que la suma [3] (recuérdese que el valor absoluto de una suma es menor o igual que la suma de los valores absolutos de los sumandos), también podrá hacerse tan pequeña como se quiera y con ello queda demostrada la convergencia de [2].

No vale el recíproco de este teorema. Lo muestra el ejemplo ya considerado de la serie armónica alternada:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots .$$

Teorema II: Si una serie es condicionalmente convergente pero no absolutamente convergente, tanto la serie formada con los términos positivos como la formada con los términos negativos son divergentes.

Llamando v_n a los términos positivos y w_n a los negativos, si las series $\sum v_n$, $\sum w_n$ fueran convergentes, la serie resultaría absolutamente convergente, contra la hipótesis.

Tampoco puede resultar una de las series convergente y la otra divergente porque entonces la serie no sería convergente, contra la hipótesis

Por lo tanto deben ser divergentes las series $\sum v_n$, $\sum w_n$.

Ya hemos visto, al tratar de límites indeterminados como la diferencia de infinitos puede resultar finita.

En la serie armónica alternada, tanto la serie formada con los términos positivos

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots ,$$

como la serie formada con los términos negativos

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots ,$$

son divergentes

Teorema de Riemann: Si una serie es condicionalmente convergente, cambiando el orden de los términos puede hacerse que su suma sea un valor dado cualquiera.

Explicaremos como debe procederse en un caso concreto. Propongámonos cambiar el orden de los términos de la serie armónica alternada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

de modo que la suma resulte, por ejemplo, igual a 1,5.

Empezaremos por escribir un número suficiente de términos positivos hasta lograr que la suma parcial de r términos

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2r - 1}$$

supere a 1,5, con la condición de que la suma de $(r - 1)$ términos no alcance a 1,5. Esto será posible porque siendo la serie formada con los términos positivos, divergente, de acuerdo al teorema II puede hacerse la suma parcial mayor que cualquier número dado.

En este caso particular hay que considerar 3 términos (1):

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = 1{,}5333\ldots$$

Colocamos ahora términos negativos hasta un término tal que la suma sea inferior a 1,5. En este caso basta con el primer término negativo:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = 1{,}033\ldots.$$

Ahora agregamos términos positivos que hagan que la suma correspondiente supere a 1,5:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} = 1{,}5218\ldots.$$

El segundo término negativo ya hace disminuir la suma hasta un valor inferior a 1,5 y se continúa así indefinidamente:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{4} + \frac{1}{17} + \cdots + \\ + \frac{1}{25} - \frac{1}{6} + \cdots.$$

La divergencia de la serie de términos positivos y de términos negativos asegura la posibilidad de este proceso.

El mismo procedimiento se puede aplicar a cualquier otra serie condicionalmente convergente. También puede lograrse, modificando el orden de los términos, que la nueva serie sea oscilante o divergente.

---

(1) El cálculo se hace fácilmente utilizando la tabla I (1 000 × recíproca) de la página 8 del apéndice.

Ejercicios.

1. La serie estudiada por Leibniz:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots,$$

es convergente y tiene por suma el valor $\frac{1}{4}\pi$.

Modificar el orden de los términos de modo de convertirla en una serie convergente de suma igual a $\frac{1}{2}$.

R. $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} - \frac{1}{19} - \frac{1}{23} + \frac{1}{9} - \cdots$.

2. Modificar el orden de los términos de la serie

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \cdots,$$

de modo que la suma de la nueva serie sea igual a 2 (Racionalícese cada término y utilícense las tablas del apéndice).

11. SERIES DE TERMINOS COMPLEJOS

La definición de serie $\sum u_n$ se extiende al caso en que los términos u_n son números complejos:

$$u_n = \alpha_n + i\beta_n.$$

La suma parcial S_n de los n primeros términos será un número complejo $A_n + iB_n$ y el límite de esta suma S_n, cuando $n \to \infty$, será la suma $A + iB$ de la serie. Luego la serie $\sum u_n$ de términos complejos será convergente siempre que lo sean las series $\sum \alpha_n$, $\sum \beta_n$ de las partes reales e imaginarias de u_n y recíprocamente.

Si las series $\sum \alpha_n$, $\sum \beta_n$ son *absolutamente convergentes*, la serie $\sum u_n$ se dice *absolutamente convergente.*

Demostraremos ahora el

Teorema: La condición necesaria y suficiente para que una serie de términos complejos $\sum u_n$ sea absolutamente convergente es que sea convergente la serie $\sum |u_n|$ donde $|u_n|$ es el módulo del complejo $u_n = \alpha_n + i\beta_n$.

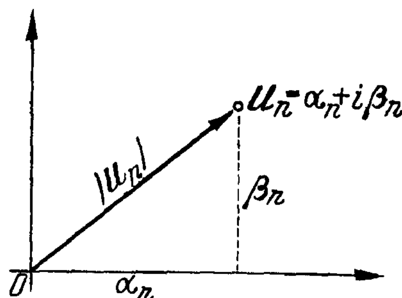


Fig XIV-9

1°) La condición es necesaria, pues si $\sum u_n$ es absolutamente convergente, son convergentes $\sum |\alpha_n|$ y $\sum |\beta_n|$ de acuerdo a la definición. Como es

$$|u_n| = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} < |\alpha_n| + |\beta_n|$$

resulta evidentemente $\sum |u_n|$ convergente.

2º) La condición es suficiente, pues siendo

$$|\alpha_n| < \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2},$$

$$|\beta_n| < \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2},$$

las dos series $\sum |\alpha_n|$ y $\sum |\beta_n|$ son convergentes y por consiguiente $\sum u_n$ es absolutamente convergente cuando es convergente $\sum \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$.

De acuerdo a la definición surge de inmediato que una serie absolutamente convergente de términos complejos es convergente.

Ejemplo:

Consideremos la serie geométrica

$$1 + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^n + \cdots,$$

en la que $q = \alpha + i\beta = \varrho \underline{|\varphi}$ es un número complejo. Procediendo como en el caso real se tiene $S_n = \dfrac{1}{1-q} - \dfrac{q^n}{1-q}$. Será $q^n = \varrho^n \underline{|n\varphi}$ y si $\varrho < 1$, cuando $n \to \infty$, $\varrho^n \to 0$, y por consiguiente $q^n \to 0$. La suma de la serie resultará:

$$S = \frac{1}{1-q} \quad \text{si} \quad |q| < 1.$$

12. ALGEBRA DE LAS SERIES

La suma de un número finito de sumandos goza de propiedades (asociativa, disociativa, conmutativa, etc.) que no siempre se conservan en las series. Habrá qué asegurarse cuando se agrupan términos de una serie o se pasan términos de un miembro a otro que las operaciones sean legítimas.

Critíquese el siguiente razonamiento·

Escribiendo la serie armónica en la forma

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots\right)$$

y pasando los términos del segundo paréntesis al primer miembro resulta

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + \cdots = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots$$

o sea

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots.$$

Como a partir de los segundos términos de estas series se verifica:

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{3}; \frac{1}{6} < \frac{1}{5}; \dots,$$

deberá ser (para que valga la igualdad), $\frac{1}{2} > 1$, resultado evidentemente absurdo.

1º) *Propiedad asociativa:* Aplicando la definición de suma de una serie se demuestra fácilmente que si una serie

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

es *convergente* se pueden reemplazar varios términos sucesivos por su suma efectuada.

La convergencia de

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots,$$

asegura la convergencia de

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n} + \cdots,$$

obtenida agrupando sucesivamente cada dos de los términos de la primer serie.

Obsérvese que hay que asegurarse que la serie sea convergente antes de sustituir los términos por su suma efectuada. Así, si en la serie oscilante

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots,$$

se agrupan los términos sucesivos, por pares se obtiene la serie convergente

$$0 + 0 + 0 + 0 + \dots$$

y ambas series son esencialmente distintas.

2º) *Propiedad conmutativa:* Si una serie es absolutamente convergente, se puede alterar el orden de sus términos sin que varíe su suma (Teorema de Dirichlet - 1837).

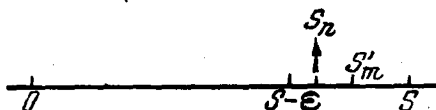


FIG. XIV-10.

Empezaremos por demostrar el teorema para el caso de series de términos positivos. Supongamos que a partir de la serie de términos positivos $\sum u_n$ formamos la serie $\sum u'_n$ con los mismos términos escritos en un orden diferentes. A cada u_n corresponderá un u'_n de modo que la suma S_n de la serie primitiva estará contenida en una cierta suma S'_m de la segunda (que contendrá eventualmente otros términos más). Como $S_n \to S$ a partir de un cierto valor n_0 será $S_n > S - \varepsilon$.

Además es $S'_m > S_n$. Como la serie es de términos positivos, las sumas parciales son crecientes y menores que S, es decir se verifica $S - \varepsilon < S'_m < S$. La sucesión de las sumas parciales S'_m de la serie reordenada tendrá como límite S.

A la misma conclusión se llega en el caso de términos cualesquiera si la serie es absolutamente convergente. En efecto, si $\sum u_n$ es absolutamente convergente dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario se puede hacer

$$|S_n - S| < |u_n| + |u_{n+1}| + \ldots < \varepsilon,$$

a partir de un valor n_0 suficientemente grande.

Consideremos la serie reordenada $\sum u'_m$ y sea S'_m una suma parcial que contiene todos los términos de S_n y algunos más y sea $m > n_0$. La diferencia entre S'_m y S_n solo puede contener algunos términos u_n con $n > n_0$ y por consiguiente debe ser $|S'_m - S_n| < \varepsilon$.

Como es

$$|S - S'_m| = |(S - S_n) + (S_n - S'_m)| < |S - S_n| + |S_n - S'_m| < 2\varepsilon,$$

resulta que $S'_m \to S$, o sea que la serie reordenada es convergente y tiene la misma suma que la serie dada.

Resulta de acuerdo a este teorema de Dirichlet, que si una serie es absolutamente convergente es *incondicionalmente convergente*, llamando así a las series cuya suma no depende del orden de sus infinitos sumandos.

Por otra parte el teorema de Riemann (pág. 530) muestra que la condición de convergencia absoluta es esencial.

3º) *Suma de series:* Sumando término a término dos series convergentes

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots,$$

$$V = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots,$$

se obtiene una serie también convergente de suma igual a $U + V$.

4º) *Factor común:* Si se multiplican los términos de una serie convergente $\sum u_n = U$ por un factor numérico k, se obtiene una serie convergente de suma igual a kU: $\sum ku_n = kU$.

5º) *Multiplicación de series:* Consideremos 2 series convergentes:

$$U = \sum u_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots, \qquad [1]$$

$$V = \sum v_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n + \ldots. \qquad [2]$$

Formemos el cuadro [3] haciendo todos los productos $u_r v_s$:

$$\begin{array}{ccccc} u_0v_0 & u_0v_1 & u_0v_2 & \dots & u_0v_n & \dots \\ u_1v_0 & u_1v_1 & u_1v_2 & \dots & u_1v_n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_nv_0 & u_nv_1 & u_nv_2 & \dots & u_nv_n & \dots \end{array} \qquad [3]$$

Definiremos como *serie producto* de [1] y [2] a la serie $\sum w_n$ con

$$w_n = u_0v_n + u_1v_{n-1} + \dots + u_nv_0,$$

donde sus elementos w_n se forman sumando diagonalmente los términos de [3].

Demostraremos el

Teorema de Cauchy: Si las series [1] y [2] son absolutamente convergentes, la serie producto es absolutamente convergente y su valor es $U \cdot V$.

En lugar del cuadro [3] obtenido multiplicando $\sum_0^n u_r$ por $\sum_0^n v_s$, consideremos el cuadro correspondiente formado con los términos del producto $\sum_0^n |u_r| \cdot \sum_0^n |v_s|$. Cuando $n \to \infty$ estas dos sumas tienden a valores finitos (por tratarse de series absolutamente convergentes), de modo que la suma de los términos positivos $|u_r|\,|v_s|$ estará acotada y por consiguiente la serie correspondiente converge, o de otro modo que la serie obtenida sumando los términos de [3] es absolutamente convergente y por lo tanto es convergente.

La suma de esta serie convergente es UV puesto que la suma parcial de sus n^2 primeros términos es $\sum_0^n u_r \cdot \sum_0^n v_s$.

Demostrada la convergencia absoluta de la serie correspondiente al cuadro [3], en virtud del teorema de Dirichlet, podemos reordenar los términos y adoptando la ordenación en diagonal queda demostrado el teorema de Cauchy.

Otros teoremas sobre productos de series.

I) *Teorema de Mertens:* Si la serie [1] es absolutamente convergente y la serie [2] es convergente, la serie producto obtenida con la regla de Cauchy es convergente.

II) *Teorema de Abel:* Si las series [1] y [2] son convergentes y también lo es la serie $\sum w_n$ formada con la regla de Cauchy, es $UV = W$ donde U, V y W son las sumas de las series correspondientes.

III) *Teorema de Hardy:* Si en las series [1] y [2] $nu_n \to 0$ y $nv_n \to 0$,

entonces $\sum w_n$ converge. El resultado subsiste si los coeficientes de [1] y [2] satisfacen las condiciones menos restrictivas $|nu_n| < K$, $|nv_n| < K$, con K constante para todo n.

(Las demostraciones de estos teoremas exceden del marco de este libro y pueden verse en los tratados especializados de series de K. Knopp, T. J. Bromwich y G. H. Hardy).

UN EJEMPLO CRÍTICO DE PRODUCTO DE SERIES.

Si multiplicamos la serie convergente

$$\sum u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

por sí misma de acuerdo a la regla de Cauchy resulta:

$$w_0 = u_0u_0 = \frac{1}{\sqrt{1}}\frac{1}{\sqrt{1}} = 1.$$

$$w_1 = u_0u_1 + u_1u_0 = -\left[\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 1}}\right] = -\sqrt{2}.$$

$$w_2 = u_0u_2 + u_1u_1 + u_2u_0 = +\left[\frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{3\cdot 1}}\right] =$$

$$= + \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{2}.$$

. . . .

$$w_n = (-1)^n \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(r+1)(n+1-r)}}.$$

La serie $\sum w_n$ es divergente porque el término general no tiende a cero. En efecto, el producto $(r+1)(n+1-r)$ de factores de suma constante e igual a $(n+2)$ es siempre menor que $\frac{1}{4}(n+2)^2$ (ver pág. 207). Por consiguiente el término general de la suma que da w_n es mayor que $\frac{2}{n+2}$ y $(n+1)$ de tales términos serán mayores que $2\frac{n+1}{n+2}$ que tiende a 2 cuando $n \to \infty$.

¿Por qué no puede aplicarse ninguno de los teoremas de multiplicación de series?

(Obsérvese que la serie dada no es absolutamente convergente, a pesar de ser convergente).

CAPÍTULO XV

SERIES DE POTENCIAS

1. INTRODUCCION

Se llaman series de potencias a las expresiones del tipo

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n. \qquad [1]$$

Para cada valor de x se tiene una serie numérica. Si la serie es convergente tendrá como suma un número finito. ¿Para qué valores de x se obtendrán esos valores finitos?

En el caso de la serie

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots \qquad [2]$$

se ve fácilmente que reemplazando x por un número real comprendido entre -1 y $+1$ la serie numérica que resulta es convergente. En efecto, la expresión [2] es una serie geométrica de razón $-x$ y de acuerdo a lo visto anteriormente si la razón es, en valor absoluto, menor que la unidad, no sólo podemos asegurar que la serie es convergente sino que podemos calcular exactamente su suma: $\dfrac{1}{1-(-x)} = \dfrac{1}{1+x}$. En otros términos: la serie [2] coincide con la función $\dfrac{1}{1+x}$ cuando x está comprendida entre -1 y $+1$.

También vale el razonamiento anterior si la variable es un número complejo de módulo inferior a 1 (como vimos en la pág. 533). Generalmente la variable compleja se designa con la letra z.

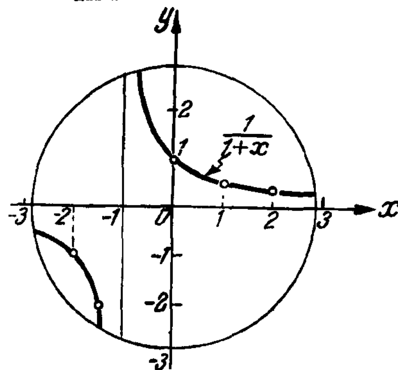


FIG. XV-1.

Demostraremos ahora que para los valores x de un cierto intervalo $(-R, +R)$ simétrico respecto del origen, la serie [1] define una función $f(x)$, pudiendo ser R un valor finito y distinto de cero, nulo o infinito. R recibe el nombre de *radio de convergencia*.

Si la serie de los módulos de los términos de [1]

$$|a_0| + |a_1|\,|x| + |a_2|\,|x|^2 + \ldots + |a_n|\,|x|^n + \ldots, \qquad [3]$$

es convergente, entonces [1] será convergente puesto que —como hemos demostrado antes— una serie absolutamente convergente es convergente.

Para estudiar la convergencia de la *serie de términos positivos* [3] podemos emplear cualquiera de los criterios estudiados, por ejemplo el de D'Alembert:

La serie [3] será convergente si formado el cociente

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}\frac{|x|^n}{|x|^{n-1}} = \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|\,|x|$$

su límite, cuando $n \to \infty$ es menor que 1. Si escribimos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| = \lambda \qquad \text{deberá ser} \qquad \lambda\,|x| < 1,$$

o sea si $|x| < \frac{1}{\lambda}$ la serie será *convergente*.

Al valor recíproco de λ se le llama radio de convergencia (o intervalo de convergencia en el caso de series de términos reales) y de acuerdo a lo anterior es

$$R = \frac{1}{\lambda} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|. \qquad [4]$$

Análogamente se demuestra que si $|x| > R$, la serie es divergente. Si es $x = R$ o $x = -R$, este criterio no permite asegurar nada.

Empleando el criterio de la raíz enésima de Cauchy a la serie [3] resulta

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{|a_n|}\,|x| \quad \text{y si es} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = |x|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1 \quad \text{o sea si}$$

$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}},$$

la serie es *convergente*.

Por consiguiente el radio de convergencia también se puede calcular mediante la fórmula

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}. \qquad [5]$$

De acuerdo a lo visto anteriormente (pág. 518) este valor de R coincide con el valor dado por [4].

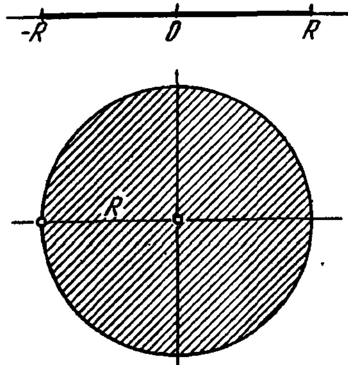


FIG. XV-2. — Las series de potencias de variable real convergen en el segmento $(-R, +R)$ y las de variable compleja en el círculo de radio R y centro en el origen.

Las demostraciones anteriores son válidas aún en el caso de que tanto los coeficientes a_n como la variable z sean números complejos Resulta entonces que si es $|z| < R$, la serie es convergente.

El conjunto de los puntos z que verifican esta condición constituye el interior de un círculo con centro en el origen y radio R. (Si es $R = 0$, el círculo se reduce a un punto, el origen, y si es $R = \infty$, se trata de todo el plano).

Si la serie de potencias es del tipo $\sum a_n (z - z_0)^n$, siguiendo los pasos de la demostración anterior, se verifica fácilmente que la serie converge si es $|z - z_0| < R$. Los puntos z que verifican esta condición se encuentran en el círculo de centro z_0 y radío R.

EJEMPLOS:

1°) Determinar el intervalo de convergencia de la serie

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ \ldots$$

Como es $|a_n| = |a_{n-1}| = 1$, el límite del cociente es 1 y se tiene $R = 1$, resultado coincidente con el hallado al estudiar las series geométricas.

2°) Idem de

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots .$$

Siendo $a_n = \dfrac{1}{n!}$, $a_{n-1} = \dfrac{1}{(n-1)!}$ resulta

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n-1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Es decir: la serie converge para cualquier valor de x. Las series de este tipo se llaman *series enteras* y son las que tienen las mayores analogías con los polinomios.

3°) Idem de

$$1 + 1!x + 2!x^2 + \cdots n!x^n + \cdots .$$

Siendo el cociente $\dfrac{a_{n-1}}{a_n} = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$ resulta $R = 0$ y por consiguiente

esta serie no converge para ningún valor de x excepto el origen 0.

EJERCICIOS:

Determinar para qué valores de la variable real x o de la variable compleja z, convergen las siguientes series:

1. $x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \cdots$ $\qquad -1 \leqslant x \leqslant 1.$

2. $1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$ $\qquad$ Todo valor de z.

3. $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ $\qquad -1 < x < 1.$

4. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$ $\qquad -1 < x \leqslant 1.$

5. $z + z^4 + z^9 + z^{16} + \cdots$ $\qquad |z| < 1.$

6. $x + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{x^3}{\sqrt{3}} + \frac{x^4}{\sqrt{4}} + \cdots$ $\qquad -1 \leqslant x < 1.$

7. $1 - \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{x^4}{\sqrt{4}} - \frac{x^6}{\sqrt{6}}$ $\qquad -1 \leqslant x \leqslant 1.$

8. $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$ $\qquad$ Todo valor de x.

9. $z - \frac{z^3}{2!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$ $\qquad$ Todo valor de z.

10. $x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdots$ $\qquad -1 \leqslant x \leqslant 1.$

11. $1 - x^2 + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2}x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^6 + \cdots$ $\qquad -\frac{1}{2}\sqrt{2} < x < \frac{1}{2}\sqrt{2}.$

12. $\frac{z}{2^2} + \frac{z^2}{4^2} + \frac{z^3}{6^2} + \frac{z^4}{8^2} + \cdots$ $\qquad |z| < 1.$

13. $\frac{x}{2 \cdot 3} + \frac{x^2}{3 \cdot 4} + \frac{x^3}{4 \cdot 5} + \cdots$ $\qquad -1 < x < 1.$

14. $z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots$ $\qquad |z| < 1.$

15. $x - 3x^3 + 5x^5 - \cdots$ $\qquad -1 < x < 1.$

16. $\frac{x}{3} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{11} - \cdots$ $\qquad -1 \leqslant x \leqslant 1.$

17. $\frac{z}{1 \cdot 2} - \frac{z^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{z^3}{3 \cdot 2^3} - \cdots$ $\qquad |z| < 2.$

18. $x + \frac{2x^2}{2!} + \frac{3x^3}{3!} + \frac{4x^4}{4!} + \cdots$ $\qquad$ Todo valor de x.

19. $1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^4}{2^4} + \cdots$ $\quad -2 < x < 2.$

20 $x + \frac{2^2}{5}x^2 + \frac{2^3}{10}x^3 + \cdots$ $\quad -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}.$

21 $\frac{z}{3^2} - \frac{1}{3}\frac{z^3}{3^3} + \frac{1}{3}\frac{z^5}{3^5} - \cdots$ $\quad |z| < 3.$

22 $1 + \frac{2^2}{2!}x + \frac{3^2}{3!}x^2 + \frac{4^2}{4!}x^3 + \cdots$ $\quad$ Todo valor de x.

23 $\frac{1}{3} + \frac{2x}{2 \cdot 3^2} + \frac{3x^2}{2^2 \cdot 3^3} + \cdots$ $\quad -6 < x < 6.$

24. $z + 4z^2 + 9z^3 + 16z^4 + \cdots$ $\quad |z| < 1.$

25. $\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \cdots$ $\quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$

26 $\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{2x^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3x^3}{2^2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$ $\quad -2 < x < 2.$

27. $1 - \frac{z}{10} + \frac{2!z^2}{100} - \frac{3!z^3}{1\,000} + \cdots$ $\quad z = 0.$

28. $\frac{10}{1}x + \frac{100}{2!}x^2 + \frac{1000}{3!}x^3 + \cdots$ $\quad$ Todo valor de x.

29 $\frac{x}{6} - \frac{x^2}{2^2 \cdot 6^2} + \frac{x^3}{3^2 \cdot 6^3} - \cdots$ $\quad -6 \leqslant x \leqslant 6.$

30. $\frac{z}{2} + \frac{2z^2}{2^2} + \frac{3z^3}{2^3} + \cdots$ $\quad |z| < 2.$

31 $1 - \frac{x^2}{2^2(1!)^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2}$ $\quad$ Todo valor de x.

32 Para qué valores de x converge la serie:

$$1 + \frac{2(x-2)}{3} + \frac{3(x-2)^2}{3^2} + \cdots \frac{(n+1)(x-2)^n}{3^n} + \cdots.$$

Analizar lo que sucede en los extremos del intervalo de convergencia.

Solución· Sean $u_n = \frac{(n+1)(x-2)^n}{3^n}$, $u_{n+1} = \frac{(n+2)(x-2)^{n+1}}{3^{n+1}}$ y el cociente $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n+2}{n+1}\,\frac{|x-2|}{3}$. Para que la serie converja debe ser

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$, es decir $\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\,\frac{|x-2|}{3} < 1$ o bien $\frac{|x-2|}{3} < 1$

y $|x-2| < 3$.

El intervalo de convergencia es entonces: $-3 < (x-2) < 3$ ó $-1 < x < 5$. En los puntos extremos $x = -1$ y $x = 5$ la serie no converge, como se ve reemplazando directamente estos valores en la serie dada (es oscilante para $x = -1$ y divergente para $x = 5$).

Determinar el intervalo de convergencia de las siguientes series del tipo $\sum a_n(z-\alpha)^n$:

33. $(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots$ $\quad 0 < x \leqslant 2$.

34. $\frac{1}{2}(x+2) + \frac{2^2}{2^2}(x+2)^2 + \frac{3^2}{2^3}(x+2)^3 + \cdots$ $\quad -4 < x < 0$.

35. $\frac{2}{1\cdot 2}(z-3) + \frac{2^2}{2\cdot 3}(z-3)^3 + \frac{2^3}{3\cdot 4}(z-3)^5 + \cdots$ $\quad |z-3| < \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

36. $\frac{(x-2)}{3} + \frac{(x-2)^2}{3^2\cdot 2} + \frac{(x-2)^3}{3^3\cdot 3} + \cdots$ $\quad -1 \leqslant x < 5$.

37. $\frac{(z-5)}{4} + \frac{(z-5)^2}{2^2 4^2} + \frac{(z-5)^3}{3^2 4^3} + \cdots$ $\quad |z-5| < 4$.

38. $\frac{(x+3)}{2\cdot 1} - \frac{(x+3)^2}{2^2\cdot 2} + \frac{(x+3)^3}{2^3\cdot 3} - \cdots$ $\quad -5 < x \leqslant -1$.

39. $(z+1) + 2(z+1)^2 + 3(z+1)^3 + \cdots$ $\quad |z+1| < 1$.

2. FORMULAS DE TAYLOR Y DE MACLAURIN

Ya hemos visto (Cap. IX, págs. 252-254) que una función $f(x)$ continua y derivable (hasta el orden n) se puede expresar mediante un polinomio y un término complementario $T_n(x)$. Demostraremos nuevamente este resultado calculando el término complementario en forma de una integral definida.

Si t es la variable de integración resulta de acuerdo a la regla de Barrow:

$$\int_0^x f'(x-t)\,dt = -\Big[f(x-t)\Big]_0^x = f(x) - f(0);$$

aplicando ahora la fórmula de integración por partes es

$$\int_0^x f'(x-t)\,dt = \Big[t\,f'(x-t)\Big]_0^x + \int_0^x t\,f''(x-t)\,dt.$$

Igualando los dos resultados se obtiene la relación:

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \int_0^x t f''(x-t)\, dt.$$

La integral de esta expresión se calcula aplicando nuevamente la fórmula de integración por partes:

$$\int_0^x t f''(x-t)\, dt = \left[\tfrac{1}{2} t^2 f''(x-t)\right]_0^x + \tfrac{1}{2}\int_0^x t^2 f'''(x-t)\, dt =$$

$$= \tfrac{1}{2} x^2 f''(0) + \tfrac{1}{2}\int_0^x t^2 f'''(x-t)\, dt$$

con lo que resulta

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{1}{2!} x^2 f''(0) + \frac{1}{2!}\int_0^x t^2 f'''(x-t)\, dt.$$

Continuando hasta el término n-simo se obtiene la fórmula de Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \cdots +$$

$$+ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + T_n(x)$$

siendo $T_n(x) = \dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_0^x t^{n-1} f^{(n)}(x-t)\, dt.$

Se puede llevar este término complementario a la forma de Lagrange. En efecto, si se hace el cambio de variables $x - t = ux$, resulta $t = x(1-u)$ y los límites de integración correspondientes a $t = 0$, $t = x$, son, respectivamente, $u = 1$, $u = 0$. Se tiene entonces

$$T_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_1^0 x^{n-1}(1-u)^{n-1} f^{(n)}(ux)\, x(-1)\, du =$$

$$= \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n)}(ux)\, du.$$

Con un valor conveniente del número ϑ que cumpla la condición $0 < \vartheta < 1$, se verifica que es

$$\int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n)}(ux)\, du = f^{(n)}(\vartheta x)\int_0^1 (1-u)^{n-1}\, du = \frac{f^{(n)}(\vartheta x)}{n}$$

quedando, finalmente, como expresión del término complementario

$$T_n(x) = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\vartheta x) \quad \text{con} \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Si se hace corresponder al extremo 0 del intervalo el valor a, al extre-

mo x el valor $a + h$, al intervalo x le corresponde h, con lo que resulta la fórmula de Taylor con el resto de Lagrange:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots +$$

$$+ \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + T_n$$

siendo

$$T_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \quad \text{con} \quad a < \xi < x.$$

3. DESARROLLO DE FUNCIONES EN SERIES DE POTENCIAS

La fórmula de Taylor (y como caso particular la de Maclaurin) permite calcular efectivamente una función mediante un polinomio y un término complementario $T_n(x)$. Si bien este término no se puede calcular numéricamente, en general, en forma exacta por la presencia del valor ξ o ϑ, se puede —en muchos casos— acotar y en esta forma determinar el *error* que se comete al tomar como valor aproximado de la función, el valor del polinomio formado con los n primeros términos.

Cabe plantear la siguiente cuestión. Dada una función $f(x)$ y formada la serie de Maclaurin correspondiente $\sum a_n x^n$ con $a_n = \frac{f^n(0)}{n!}$, ¿representará esta serie a la función dada? La respuesta es· Sí, si el término complementario $T_n(x)$ tiende a cero; no, si el término complementario no tiende a cero.

Hay un ejemplo célebre, se trata de la función $y = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$, $y = 0$ si $x = 0$, que muestra que no es lo mismo el *desarrollo* en serie de Maclaurin que la *representación* de una función en serie de Maclaurin. Para esta función todas las derivadas se anulan en el origen y por consiguiente los coeficientes de la serie de Maclaurin son todos nulos y sin embargo la función es distinta de 0 para todo $x \neq 0$. La función no se puede representar con la serie de Maclaurin correspondiente.

Cuando se estudian las funciones de variable compleja se aclaran "misterios" como el de esta función.

En la práctica se procede en la siguiente forma:

1º) Se calculan los coeficientes a_n de la serie de Maclaurin.

2º) Se calcula el radio de convergencia R de la serie así formada.

3º) Se verifica si para los valores $|x| < R$, el término complementario tiende a 0. En este caso la serie de Maclaurin *representa la función* $f(x)$.

(Salvo en casos "patológicos" en general para los valores de x que hacen convergente la serie, el término complementario tiende a 0).

Veamos los principales ejemplos de desarrollo de funciones en series de potencias; señalando que los 3 primeros ya se encuentran en la obra de NEWTON de 1711.

1º) $f(x) = e^x$ Siendo $f'(x) = f''(x) = \ldots = f^n(x) = e^x$; resulta

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^n(0) = 1$$

y por consiguiente es $a_n = \frac{1}{n!}$.

La serie para e^x resulta entonces

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

¿Para qué valores de x es válido este desarrollo?
Aplicando la fórmula que determina el intervalo de convergencia resulta

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{(n-1)!} = \lim_{n \to \infty} n = \infty.$$

Se trata de una *serie entera* pues converge para cualquier valor de x (real o complejo)
El término complementario es $T_n(x) = \frac{e^{\vartheta x}}{n!} x^n$ con $0 < \vartheta < 1$. Para un x determinado, pero cualquiera, $T_n(x) \to 0$ pues $n!$ crece más rápidamente que cualquier potencia x^n. Por consiguiente la serie representa la función exponencial.

2º) $f(x) = \operatorname{sen} x$ Las derivadas son:

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\operatorname{sen} x; \quad f'''(x) = -\cos x;$$

$$f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x, \quad \ldots, \quad f^n(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{1}{2} n\pi\right),$$

y en el origen valen:

$$f(0) = f''(0) = f^{IV}(0) = \ldots = f^{2k}(0) = 0;$$

$$f'(0) = f'''(0) = \ldots = f^{2k+1}(0) = (-1)^k;$$

con lo que resulta la serie de Maclaurin

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots.$$

También esta es una serie entera pues

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} = \lim_{n \to \infty} (2n+1)(2n) = \infty.$$

El resto es $T_{2n+1} = \frac{\operatorname{sen}\left[\vartheta x + \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right]}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ que tiende a 0 cuando $n \to \infty$,

cualquiera sea x

3°) $f(x) = \cos x$. Procediendo como en el ejemplo anterior resulta:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots$$

4°) $f(x) = \operatorname{Sh} x$. Las derivadas sucesivas son

$$f'(x) = \operatorname{Ch} x; \quad f''(x) = \operatorname{Sh} x, \quad \ldots; \quad f^{2n-1}(x) = \operatorname{Ch} x; \quad f^{2n}(x) = \operatorname{Sh} x$$

y los coeficientes de la serie de Maclaurin serán $a_{2n-1} = \dfrac{1}{(2n+1)!}$ puesto que es $f^{2n-1}(0) = 1$; $f^{2n}(0) = 0$.

La serie resulta

$$\operatorname{Sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

5°) $f(x) = \operatorname{Ch} x$. Procediendo como en el caso anterior se obtiene

$$\operatorname{Ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

(En el capítulo IX hemos hecho aplicaciones de estos desarrollos para el cálculo efectivo de valores de las funciones trascendentes).

La función exponencial en el campo complejo. Fórmulas de Euler. Relaciones con las funciones hiperbólicas: Hemos deducido la serie de Maclaurin de la función exponencial

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad [1]$$

y hemos visto que esta serie tiene un radio de convergencia ∞.

Reemplazando x por la variable compleja $z = x + iy$, resulta la serie de términos complejos

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \qquad [2]$$

convergente para cualquier valor finito de z, es decir convergente en todo el plano.

Podemos adoptar como definición de la función exponencial e^z en el plano complejo a la serie [2]. En particular tomando un valor imaginario $z = iy$, resulta

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \cdots + \frac{(iy)^n}{n!} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{iy}{1!} - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots + \frac{i^n y^n}{n!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right).$$

Recordando las expresiones de las series de seno y coseno resulta la célebre fórmula de Euler (1748):

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y. \qquad [1]$$

Como vemos por esta expresión e^{iy} es un número complejo de módulo 1 (pues $\sqrt{\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y} = 1$) y de argumento y.

Si en lugar del argumento y consideramos $-y$. resulta:

$$e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y. \qquad [2]$$

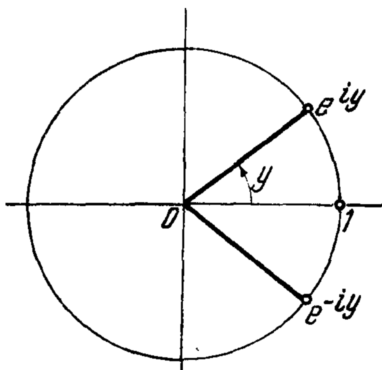


FIG. XV-3. — Cuando y varía, e^{iy} recorre la circunferencia de radio 1.

Sumando y restando las relaciones [1] y [2] resultan las fórmulas de Euler:

$$\cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy}), \qquad \operatorname{sen} y = \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy}). \qquad [3]$$

Las definiciones de las funciones hiperbólicas

$$\operatorname{Sh} x = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}), \qquad \operatorname{Ch} x = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}), \qquad [4]$$

tienen grandes analogías con las expresiones de Euler que hemos deducido para las funciones circulares.

Resulta de inmediato de acuerdo a las relaciones [3] y [4]:

$$\operatorname{Ch} i\alpha = \cos \alpha, \qquad \cos i\alpha = \operatorname{Ch} \alpha,$$

$$\operatorname{Sh} i\alpha = i \operatorname{sen} \alpha, \qquad \operatorname{sen} i\alpha = i \operatorname{Sh} \alpha$$

y dividiendo ordenadamente:

$$\operatorname{Th} i\alpha = i \operatorname{tg} \alpha, \qquad \operatorname{tg} i\alpha = i \operatorname{Th} \alpha.$$

EJERCICIOS.

Verificar los siguientes desarrollos en serie de Maclaurin y determinar para qué valores de la variable convergen:

1. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots \cdot \qquad -1 < x < 1.$

2. $\dfrac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots \cdot \qquad -1 < x < 1.$

3. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \cdots.$ $\qquad -1 < x < 1.$

4. $\sqrt{1-x^2} = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2\cdot 4}x^4 - \dfrac{1}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 - \cdots.$ $\qquad -1 < x < 1.$

5. $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} - \cdots.$ Todo valor de x.

6. $\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{1}{4}\pi\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + x - \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots\right]$ Todo valor de x.

Verificar los siguientes desarrollos de Maclaurin:

7. $\operatorname{sen}(x+1) = \operatorname{sen} 1 + \cos 1 \cdot x - \dfrac{\operatorname{sen} 1}{2!}x^2 - \dfrac{\cos 1}{3!}x^3 + \cdots.$

8. $e^{\operatorname{sen} x} = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{8}x^4 - \dfrac{1}{15}x^5 - \cdots.$

9. $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{2}{2!}x^2 - \dfrac{2^3}{4!}x^4 + \dfrac{2^5}{6!}x^6 - \cdots.$

10. $\cos^2 x = 1 - \dfrac{2}{2!}x^2 + \dfrac{2^3}{4!}x^4 - \cdots.$

11. $2^x = 1 + (\ln 2)x + \dfrac{(\ln 2)^2}{2!}x^2 + \dfrac{(\ln 2)^3}{3!}x^3 + \cdots.$
(Hágase $2^x = e^{x \ln 2}$).

Empleando convenientemente los desarrollos en serie de Maclaurin obtenidos, verificar:

12. $\cos 1 = 0{,}5403.$

13. $\cos 10^\circ = 0{,}9848.$

14. $\sqrt{e} = 1{,}6487.$

15. $\dfrac{1}{e} = 0{,}36786$

16. $e^{-0,2} = 0{,}8188.$

17. $\operatorname{sen}\dfrac{1}{4}\pi = 0{,}7071.$

Determinar los desarrollos en serie de Taylor de las siguientes funciones en los valores de a indicados:

18. $f(x) = \sqrt{x},\ a = 4.$

19. $f(x) = \sqrt{1+x^2},\ a = 2.$

20. $f(x) = \dfrac{1}{x},\ a = -1.$

21. $f(x) = \cos x,\ a = -\dfrac{1}{4}\pi.$

22. $f(x) = \operatorname{sen} x,\ a = \dfrac{1}{6}\pi.$

23. $f(x) = e^x,\ a = 1.$

R. 18. $\sqrt{x} = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3 - \cdots.$

19. $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{5}\left[\sqrt{5} + 2\sqrt{5}\,(x-2) + \frac{\sqrt{5}}{50}(x-2)^2 - \right.$

$\left. - \frac{\sqrt{5}}{125}(x-2)^3 + \cdots\right].$

20. $\frac{1}{x} = -1 - (x+1) - (x+1)^2 - (x+1)^3 - \cdots.$

21 $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left[1 + (x + \frac{1}{4}\pi) - \frac{1}{2!}(x + \frac{1}{4}\pi)^2 - \right.$

$\left. - \frac{1}{3!}(x + \frac{1}{4}\pi)^3 + \cdots\right].$

22. $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{3}(x - \frac{1}{6}\pi) - \frac{1}{2!}(x - \frac{1}{6}\pi)^2 - \right.$

$\left. - \frac{\sqrt{3}}{3}(x - \frac{1}{6}\pi)^3 + \cdots\right].$

23. $e^x = e\left[1 + (x-1) + \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{1}{3!}(x-1)^3 + \cdots\right].$

Verificar los siguientes desarrollos:

24. $e^{a+h} = e^a\left[1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \cdots\right].$

25 $\operatorname{sen}(a+h) = \operatorname{sen} a\left[1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \cdots\right] + \cos a\left[h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \cdots\right].$

26. $\cos(a+h) = \cos a\left[1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \cdots\right] + \operatorname{sen} a\left[h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \cdots\right].$

27 Calcular $e^{1,02}$ conocido $e = 2{,}71828$ y aplicando el ejercicio 24.

R: 2,77319.

28. Conocido el valor $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ del seno y coseno de 45°, calcular el sen 46° y el cos 47° aplicando las expresiones obtenidas en los ejercicios 25 y 26.

R: 0,71934; 0,68200.

Desarrollar en serie de Taylor en el entorno del punto $x = a$ las siguientes funciones, utilizando los correspondientes desarrollos de Maclaurin:

29 $f(x) = \ln x, \ a = 1.$

30. $f(x) = \ln \cos x, \quad a = \frac{1}{3}\pi.$

31. $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x, \quad a = 1.$

R: 29. $\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} - \frac{(x-1)^3}{3!} + \cdots.$

30. $\ln \cos x = -\ln 2 - \sqrt{3}\,(x - \frac{\pi}{3}) - 2\,(x - \frac{\pi}{3})^2 - \cdots.$

31. $\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{7}{12}(x-1)^3 + \cdots.$

4. OPERACIONES CON SERIES DE POTENCIAS

Dadas dos series de potencias

$$\sum a_n x^n = A(x) \qquad \text{y} \qquad \sum b_n x^n = B(x)$$

con radios de convergencia R' y R'' respectivamente, la expresión que resulta de sumar o restar ordenadamente los coeficientes

$$\sum (a_n \pm b_n) x^n$$

es una serie de potencias que converge hacia $A(x) \pm B(x)$ en la región $|x| < R$, siendo R el menor de los valores R' y R''.

Otro tanto sucede con la expresión $\sum c_n x^n$ donde los coeficientes c_n están dados por la regla del producto de Cauchy (véase pág. 536):

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0.$$

Así a partir de las series (correspondientes al coseno y seno hiperbólicos):

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

que convergen en todo el plano se obtienen por suma y resta les series

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

$$1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

que también son convergentes en todo el plano y que corresponden respectivamente a e^x y e^{-x}.

Multiplicando de acuerdo a la regla de Cauchy las series

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots,$$

convergente la primera en todo el plano y la segunda para $|x| < 1$, se obtiene la serie:

$$1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \cdots + (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!})\,x^n + \cdots$$

que es convergente para $|x| < 1$.

EJEMPLOS:

1°) Aplicando la regla de Cauchy efectúese la multiplicación de las series

$$\sum_{o=0}^{\infty} x^n \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

y verifíquese el resultado comparando con el desarrollo en serie de $\frac{1}{1-x^2}$.

Por ser $a_n = 1$, $b_n = (-1)^n$ resulta

$$c_n = (-1)^n + (-1)^{n-1} + (-1)^{n-2} + \cdots + 1 = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ es impar,} \\ 1 \text{ si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Es decir,

$$\sum x^n \cdot \sum (-1)^n x^n = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = \frac{1}{1-x^2}$$

si $|x| < 1$. En este intervalo la primera serie representa la función $\frac{1}{1-x}$ y la segunda la función $\frac{1}{1+x}$.

2°) *Producto de exponenciales.* A partir de los desarrollos en serie

$$e^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \cdots + \frac{\alpha^n}{n!} + \cdots,$$

$$e^{\beta} = 1 + \frac{\beta}{1!} + \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^3}{3!} + \cdots + \frac{\beta^n}{n!} + \cdots,$$

resulta, aplicando la regla de Cauchy:

$$e^{\alpha} \cdot e^{\beta} = 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\beta}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{2\alpha\beta}{2!} + \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{3\alpha^2\beta}{3!} + \frac{3\alpha\beta^2}{3!} + \frac{\beta^3}{3!} + \cdots$$

Esta serie se puede escribir en la forma

$$1+\frac{\alpha+\beta}{1!}+\frac{(\alpha+\beta)^2}{2!}+\frac{(\alpha+\beta)^3}{3!}+\cdots$$

que es el desarrollo de $e^{\alpha+\beta}$. Queda así demostrada la relación

$$e^{\alpha}\cdot e^{\beta}=e^{\alpha+\beta},$$

válida para cualquier valor real o complejo de α y β.

Teniendo en cuenta que un complejo $z=a+bi$ se escribe en la forma trigonométrica $z=\varrho(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)$ y que este paréntesis es, de acuerdo a la fórmula de Euler igual a $e^{i\varphi}$, el complejo puede ponerse en la forma $z=\varrho e^{i\varphi}$ y el producto

$$z_1\cdot z_2=\varrho_1e^{i\varphi_1}\cdot\varrho_2e^{i\varphi_2}=\varrho_1\varrho_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

En particular si $z_1=z_2$ es $(\varrho e^{i\varphi})^2=\varrho^2e^{2i\varphi}$ y en general, resulta la fórmula de Moivre:

$$(\varrho e^{i\varphi})^n=\varrho^ne^{in\varphi}.$$

Expresando en palabras estas fórmulas se tiene:

El producto de dos números complejos es otro complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y cuyo argumento es la suma de los argumentos de los números dados.

La potencia n-sima de un número complejo es otro número complejo cuyo módulo es la potencia n-sima del módulo y cuyo argumento es n veces el argumento del número dado.

Ejercicios:

Verificar las siguientes series:

1. $e^{-x}\cos x=1-x+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4+\cdots.$

2. $e^{x}\operatorname{sen}\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{11}{48}x^3+\frac{1}{16}x^4+\frac{41}{3840}x^5+\cdots.$

3. $(1+x)\operatorname{sen}x=x+x^2-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{120}x^5+\frac{1}{120}x^6-\cdots.$

4. $e^{-x^2}\cos x=1-\frac{3}{2}x^2+\frac{25}{24}x^4-\frac{331}{720}x^6+\cdots.$

5. $\frac{1}{(1-x)^3}=1+3x+5x^2+10x^3+15x^4+\cdots.$

6. $\frac{1-x}{(1+x)^2}=1-3x+5x^2-7x^3+9x^4-11x^5+\cdots.$

7. $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2=1+4x+8x^2+12x^3+16x^4+\cdots.$

8. $x\cdot\cos x-\operatorname{sen}x=-\frac{2}{3!}x^3+\frac{4}{5!}x^5-\frac{6}{7!}x^7+\cdots.$

9. $\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x) = 1 - \frac{3}{4}\left[\frac{1+3}{2}x^2 - \frac{1+3^3}{2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \right.$

$$\left. + \frac{1+3^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^6 - \cdots\right]$$

10. $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x = 2\left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \cdots\right]$

11. $\operatorname{sen}^2 x = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \cdots.$

12. $\operatorname{sen}^3 x = x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \cdots.$

13. Hallar el desarrollo en serie de la función

$$f(x) = e^{\cos x}.$$

Solución: Hagamos $\cos x = u + 1$, $e^{\cos x} = e^{u+1} = e^u \cdot e$. Resulta

$$e^{u+1} = e\left[1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + \cdots\right]. \qquad [1]$$

Sabiendo que es

$$u = \cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots,$$

reemplazando en [1] se obtiene:

$$e^{\cos x} = e\left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{31}{720}x^5 + \cdots\right]$$

14. Verificar la serie

$$e^{\operatorname{sen} x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^5 - \cdots.$$

(Compárese con el desarrollo obtenido en el ejercicio 8, pág. 549)

DIVISIÓN DE SERIES DE POTENCIAS: El cociente de dos series de potencias

$$\frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + \cdots} \qquad [1]$$

se puede escribir, con a_0 como factor común en el numerador y b_0 en el denominador:

$$\frac{a_0}{b_0} \cdot \frac{1 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \cdots + \alpha_nx^n + \cdots}{1 + \beta_1x + \beta_2x^2 + \cdots + \beta_nx^n + \cdots}$$

siendo $\alpha_r = \frac{a_r}{a_0}$ y $\beta_r = \frac{b_r}{b_0}$.

Efectuando este cociente de acuerdo a las mismas reglas que se utilizan para el cálculo de la división de dos polinomios resulta:

$$\frac{a_0}{b_0}[1 + (\alpha_1 - \beta_1)x + (\alpha_2 - \alpha_1\beta_1 + \beta_1^2 - \beta_2)x^2 + (\alpha_3 - \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 - \beta_3 - \beta_1^3 + \alpha_1\beta_1^2 + 2\beta_1\beta_2)x^3 + (\alpha_4 - \alpha_3\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_1\beta_3 - \beta_4 + \beta_1^4 - \alpha_1\beta_1^3 + \alpha_2\beta_1^2 + \beta_2^2 + 2\beta_1\beta_3 + 2\alpha_1\beta_2\beta_1 - 3\beta_1^2\beta_2)x^4 + \cdots].$$

Como se ve hasta el término x^n sólo intervienen los coeficientes del numerador y denominador hasta el término n.

Evidentemente esta serie será convergente en tanto no se anule el denominador de [1].

Ejemplo

Determinar la serie $\operatorname{tg} x$ como cociente de las series de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

Para $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$ (pues el denominador se anula para $x = \frac{1}{2}\pi$), resulta empleando las relaciones anteriores:

$$\operatorname{tg} x = \frac{x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right)}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$$

habiendo escrito sólo los términos menores o iguales a x^5, para obtener en el resultado hasta esta potencia.

Ejercicios:

Verificar los siguientes desarrollos obtenidos como cociente de las series respectivas:

1. $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \cdots.$

2. $\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots.$

3. $\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \cdots.$

4. $\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos x} = 2x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{60}x^5 - \cdots.$

5. $\operatorname{Th} x = \frac{\operatorname{Sh} x}{\operatorname{Ch} x} = x - \frac{1}{3}x + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \cdots.$

6. $\frac{\ln(1 + x)}{1 + \operatorname{sen} x} = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{23}{12}x^4 + \cdots.$

7. Desarrollar en serie la función $\sec x$ calculando el cociente $\frac{1}{\cos x}$.

Solución: Hagamos $\cos x = 1 - u$, resulta

$$u = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \cdots.$$

Se tiene

$$\sec x = \frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \cdots.$$

8. Idem de $f(x) = \operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$.

R: $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{6}x + \dfrac{7}{360}x^3 + \dfrac{31}{15\,120}x^5 + \cdots.$

9. Idem de $f(x) = \operatorname{Sech} x$.

R: $\operatorname{Sech} x = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{24}x^4 - \dfrac{61}{720}x^6 + \cdots.$

5. DERIVACION E INTEGRACION DE SERIES

Dentro del intervalo de convergencia la serie de potencias que se obtiene derivando o integrando una serie de potencias $\sum a_n x^n = f(x)$, también es convergente y representa la derivada o la integral, respectivamente, de la función $f(x)$.

Las demostraciones de estas notables propiedades de las series de potencias las haremos en el próximo volumen al tratar en general de las series funcionales.

Ahora nos limitaremos a aplicar los resultados

De la serie geométrica

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \qquad |x| < 1,$$

resulta integrando término a término la serie logarítmica

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots \quad |x| < 1$$

y la constante de integración resulta nula pues para $x = 0$ es $\ln 1 = 0$.

De la serie geométrica de razón $-x^2$:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots \qquad |x| < 1,$$

resulta por integración

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \qquad |x| < 1$$

puesto que la constante de integración debe anularse por ser $\operatorname{arc\,tg} 0 = 0$.

EJERCICIOS:

1. Verificar el desarrollo de $\operatorname{sen} x$ por derivación de la serie del $\cos x$.

2. Idem de $\operatorname{arc\,sen} x$ por integración de la serie de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. Idem de $\ln(1-x)$ por integración de la serie de $\dfrac{1}{1-x}$.

4. Derivar la serie $\operatorname{tg} x$. Comparar el desarrollo con el obtenido elevando al cuadrado la expresión de $\sec x$ de la página anterior.

5. Verificar que la derivada de

$$\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{Sh} x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^5 - \frac{61}{5\,040}x^7 + \cdots$$

es $\operatorname{Sech} x$.

6. Calcular por integración del desarrollo en serie de $1 : (1 + x^2)$, la fórmula

$$\operatorname{arc\,cotg} x = \frac{1}{2}\pi - x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \cdots,$$

donde el término independiente resulta de caracterizar la constante de integración por la condición $\operatorname{arc\,cotg} 0 = \frac{1}{2}\pi$.

7. Hallar el desarrollo en serie de la función

$$y = \operatorname{Arg\,Th} x$$

por integración de la serie geométrica

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots.$$

8. Desarrollar en serie de Maclaurin

$$f(x) = \ln\sqrt{1+x}$$

y comparar con el resultado obtenido mediante la integración de una serie geométrica.

Observación: Cuando se trata de calcular el desarrollo en serie de Maclaurin de una función, ésta debe ser regular en el origen $x = 0$. Por eso no se efectúa el cálculo con la función $y = \ln x$ que es infinita en el origen y se considera en cambio $\ln(1+x)$ que, así como sus derivadas, es finita para $x = 0$.

9. Estudiar el comportamiento de la serie

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots,$$

en los extremos del intervalo de convergencia.

R: La serie es convergente en el intervalo $-1 < x < 1$ de acuerdo a lo demostrado en el texto. Para $x = -1$ resulta una serie divergente (serie armónica). Para $x = +1$, en cambio, resulta una serie convergente pues es alternada de términos decrecientes y con el término general tendiendo a cero.

Existe un teorema de Abel que afirma que si una serie $f(x)=\sum a_n x^n$ converge en el punto $x=R$, extremo del intervalo de convergencia es $\sum a_n R^n = f(R)$. Aplicado a este caso resulta

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\ln 2.$$

10 Verificar en base a los desarrollos en serie de las funciones $\ln(1+x)$ y $\operatorname{arc\,tg} x$, la relación:

$$\operatorname{arc\,tg} x=\frac{1}{2i}\ln\frac{1+ix}{1-ix}.$$

11. Idem con los desarrollos de $\ln(1+x)$ y $\operatorname{Arg\,Th} x$, verificar

$$\operatorname{Arg\,Th} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

6. CALCULO DE LOGARITMOS

Hemos hallado el desarrollo

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots \qquad [1]$$

válido para x comprendido entre -1 y $+1$.

Cambiando x por $-x$ (que varía en el mismo intervalo) es

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots \qquad [2]$$

y por consiguiente para $|x|<1$ es

$$\ln(1+x)-\ln(1-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right). \qquad [3]$$

Esta serie es particularmente apta para calcular logaritmos pues cuando x varía de -1 a $+1$, $\frac{1+x}{1-x}$ varía de 0 a $+\infty$, que es la región donde están definidos los logaritmos en el campo real. (Recomendamos al lector hacer la gráfica de la función $y=\frac{1+x}{1-x}$).

Haciendo $x=\frac{1}{2n+1}$, con n número natural, resulta

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}}=\frac{2(n+1)}{2n}=\frac{n+1}{n}$$

y la fórmula [3] se escribe

$$\ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln(n) =$$

$$= 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots\right]. \qquad [4]$$

Para calcular $\ln 2$ se hace $n = 1$ y resulta

$$\ln 2 = 2\left[\frac{1}{3^1} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \cdots\right] \cong 0{,}69315.$$

Para calcular $\ln 3$ se hace $n = 2$:

$$\ln 3 = \ln 2 + 2\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} + \cdots\right] \cong 1{,}09861.$$

Para calcular $\ln 4$ basta observar que es $2\ln 2$ y para $\ln 5$:

$$\ln 5 = \ln\left(2^2\cdot\frac{5}{4}\right) = 2\ln 2 + \ln\frac{5}{4} =$$

$$= 2\ln 2 + 2\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{3\cdot 9^3} + \frac{1}{3\cdot 9^4} + \cdots\right] \cong 1{,}60944.$$

En esta forma se puede hacer una tabla de logaritmos naturales.

Cuantas más cifras decimales exactas deba tener la tabla, más términos del desarrollo en serie habrá que emplear. (En el apéndice fig ra una tabla de logaritmos neperianos de 4 decimales).

En los cálculos técnicos se utilizan especialmente los logaritmos decimales (que escribimos lg). Puesto que es, tal como vimos en la página 64

$$\lg A = \ln A \cdot M \qquad \text{siendo} \qquad M = 0{,}43429448\ldots,$$

la serie [4] sirve también para calcularlos:

$$\lg(n+1) = \lg n + 2M\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots\right]$$

Nota: Obsérvese que el valor de M puede calcularse en base a las series anteriores recordando que $\frac{1}{M} = \ln 10 = \ln 2 + \ln 5 \cong 2{,}30259.$

Interpolación en las tablas de logaritmos: Supongamos que estamos calculando con una tabla de logaritmos de 5 decimales como la de Hoüel en la cual están consignadas las mantisas de los logaritmos decimales entre 1 y 10 800.

Consideraremos sólo los números entre 1 000 y 10 000 pues los valores de las mantisas de los logaritmos de 1 a 999 se encuentran entre esos valores.

Se desea calcular el error cometido al hacer una interpolación lineal para calcular el valor del logaritmo de $n + \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, cuando se toma el valor:

$$\lg(n + \alpha) = \lg n + \alpha[\lg (n + 1) - \lg n] \qquad [1]$$

que resulta de suponer que los valores de la función logarítmica entre n y $n + 1$, están situados sobre la recta que une los puntos de ordenadas $\lg n$ y $\lg (n + 1)$.

Calculemos el error ε entre el valor exacto $\lg (n + \alpha)$ y el proporcionado por la fórmula [1]:

$$\varepsilon = \lg (n + \alpha) - \{\lg n + \alpha[\lg (n + 1) - \lg n]\} =$$

$$= \lg \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) - \alpha \lg \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Desarrollando en serie estos logaritmos se tiene, designando como siempre con M al módulo de la transformación:

$$\varepsilon = M\left[\frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha^2}{2n^2} + \frac{\alpha^3}{3n^3} - \cdots\right] - M\alpha\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \cdots\right] =$$

$$= M\left[\frac{\alpha(1 - \alpha)}{2n^2} - \frac{\alpha(1 - \alpha^2)}{3n^3} + \frac{\alpha(1 - \alpha^3)}{4n^4} - \cdots\right].$$

La serie entre corchetes es alternada, decreciente y con el término general tendiendo a 0. Deteniéndonos en el primer término tenemos un valor de su suma por exceso

$$\varepsilon < M\frac{\alpha(1 - \alpha)}{2n^2} = \frac{M}{2n^2}\left[\frac{1}{4} - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2\right] < \frac{M}{8n^2}.$$

Como es $M < \frac{1}{2}$ y $n > 10^3$ resulta $\varepsilon < 7 \times 10^{-8}$.

Se ve entonces que el error proveniente de la interpolación no afecta la quinta cifra decimal; más importantes serán los errores de los cálculos en la fórmula [1].

La interpolación inversa consiste en calcular $(n + \alpha)$ a partir de $\lg (n + \alpha)$ [que está comprendido entre $\lg n$ y $\lg (n + 1)$]. Para ello se calcula α mediante la relación

$$\alpha \cong \frac{\lg (n + \alpha) - \lg n}{\lg (n + 1) - \lg n}$$

obtenida en base a la proporción de los lados de los triángulos semejantes.

El error ε' en la determinación de α será:

$$\varepsilon' = \frac{\lg(n+\alpha) - \lg n}{\lg(n+1) - \lg n} - \alpha =$$

$$= \frac{\ln(n+\alpha) - \ln n - \alpha[\ln(n+1) - \ln n]}{\ln(n+1) - \ln n} =$$

$$= \frac{\ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right) - \alpha \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\varepsilon}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

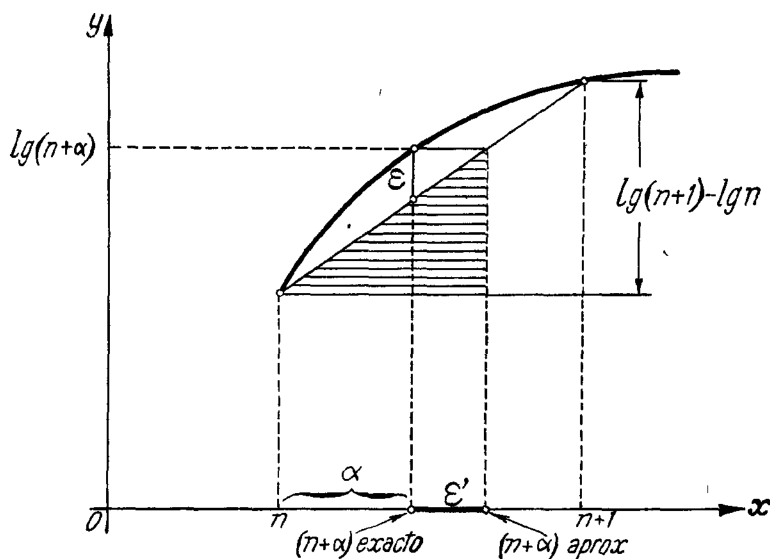


Fig. XV-4.

Ya se ha visto que es $\varepsilon < \frac{M}{8n^2}$ y como es

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \cdots > \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2},$$

resulta $\varepsilon' < \dfrac{M}{8n^2\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2}\right)} = \dfrac{M}{8n-4}$.

Como es $n \geqslant 1\,000$ resulta $\varepsilon' < 6 \times 10^{-5} < 10^{-4}$.

EJERCICIO:

Verificar que la expresión $(x - \frac{1}{2}x^2)$ proporciona valores aproximados de $\ln(1 + x)$ dentro del siguiente orden de error:

Para $x = 0{,}5$ el error es de 5 %,

$x = 0{,}05$ „ „ „ „ 2,5 %,

$x = 0{,}01$ „ „ „ „ 0,1 %.

Hacer las gráficas de las funciones x, $x - \frac{1}{2}x^2$, $\ln(1 + x)$ en el intervalo $(0,1)$.

CÁLCULO DE π: La serie de la función $\operatorname{arc\,tg} x$ proporciona una manera de calcular el número π pues es $\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{1}{4}\pi$. Resulta entonces la serie de Leibniz:

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots .$$

Esta serie a pesar de ser lentamente convergente y por consiguiente poco apropiada para un calculista, fué adoptada para hacer el cálculo con la máquina electrónica Eniac habiéndose calculado así los 2 035 primeros decimales de π.

Cuando no se disponía de calculadoras tan veloces los matemáticos habían empleado otras series mucho más rápidamente convergentes. Así a partir de la relación

$$\frac{1}{4}\pi = 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}$$

se puede calcular, en base a la serie de $\operatorname{arc\,tg} x$, el valor de π:

$$\frac{1}{4}\pi = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \cdots\right).$$

Con esta serie calculó SHANKS 707 cifras en 1873 y en 1955, empleando la máquina NORC se llegó a calcular 3 090 dígitos.

7. DESARROLLO DEL BINOMIO

Consideremos la función

$$y = (1 + x)^a$$

donde a es un número real cualquiera y calculemos los coeficientes de la serie de Maclaurin correspondiente. Por ser:

$$f(x) = (1+x)^\alpha, \qquad f(0) = 1;$$
$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \qquad f'(0) = \alpha;$$
$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \qquad f''(0) = \alpha(\alpha-1);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^n(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$
$$f^n(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1),$$

resulta

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots \qquad [1]$$

Determinemos el radio de convergencia de esta serie de potencias:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-1)!}\cdot\frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{\alpha-n+1}\right| = 1.$$

La serie [1] es convergente para todo x que verifique la relación $|x| < 1$. Para los puntos extremos $x = \pm 1$, la convergencia o divergencia depende del signo de α.

Si α es un número natural n, la derivada $(n+1)$ es idénticamente nula; la serie queda limitada entonces a un polinomio y por consiguiente converge para todo valor de x.

Cualquier potencia de un binomio: $(a+b)^\alpha$ puede desarrollarse de acuerdo a esta fórmula. En efecto, se puede escribir:

$$a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right) = a(1+x), \quad \text{con} \quad x = b : a.$$

Si es $|b| < |a|$, resulta $|x| < 1$ y por consiguiente

$$(a+b)^\alpha = a^\alpha(1+x)^\alpha = a^\alpha\left(1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots\right) = a^\alpha + \alpha a^{\alpha-1}b + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}a^{\alpha-2}b^2 + \cdots \qquad [2]$$

que generaliza para cualquier valor del exponente α y $|b| < |a|$, la conocida fórmula del binomio de Newton.

La fórmula [2] es muy apropiada para calcular raíces cuando se quiere una aproximación superior a la que se obtiene con una

tabla de logaritmos. Como en este caso la serie resulta alternada, se puede calcular además el error de la determinación.

EJEMPLOS:

1º) Sea calcular $\sqrt[5]{48}$.

Escribimos $48 = 2^5 + 16 = 2^5\left(1 + \frac{16}{32}\right) = 2^5\left(1 + \frac{1}{2}\right)$. Resulta entonces:

$$\sqrt[5]{48} = 2\left(1 + \frac{1}{2}\right)^{1/5} = 2\left[1 + \frac{1}{5}\,\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - 1\right)}{2!}\,\frac{1}{2^2} + \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - 1\right)\left(\frac{1}{5} - 2\right)}{3!}\,\frac{1}{2^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - 1\right)\left(\frac{1}{5} - 2\right)\left(\frac{1}{5} - 3\right)}{4!}\,\frac{1}{2^4} + \cdots\right] = 2{,}168944\ldots.$$

2º) Sea calcular $\sqrt[5]{30}$.

Como es $30 = 2^5 - 2 = 2^5\left(1 - \frac{2}{32}\right) = 2^5\left(1 - \frac{1}{16}\right)$, resulta

$$\sqrt[5]{30} = 2\left(1 - \frac{1}{16}\right)^{1/5} =$$

$$= 2\left[1 - \frac{1}{5}\,\frac{1}{16} + \frac{\frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}\right)}{2!}\,\frac{1}{16^2} - \frac{\frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{9}{5}\right)}{3!}\,\frac{1}{16^3} + \cdots\right] = 1{,}974350\ldots.$$

Con las fórmulas del binomio resultan expresiones que se aplican muy frecuentemente en cálculo aproximado.

Así todo número N se puede escribir en la forma

$$N = a^2 + r = a^2\left(1 + \frac{r}{a^2}\right)$$

y resulta

$$\sqrt{N} = a\left(1 + \frac{r}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} = a\left[1 + \frac{1}{2}\,\frac{r}{a^2} - \frac{1}{8}\,\frac{r^2}{a^4} + \cdots\right] =$$

$$= a + \frac{1}{2}\,\frac{r}{a} - \frac{1}{8}\,\frac{r^2}{a^3} + \cdots.$$

Luego $\sqrt{N} \sim a$ por defecto con error $\Delta < \frac{1}{2}\,\frac{r}{a}$; o más aproximadamente, se obtiene un valor por exceso con $\sqrt{N} \sim a + \frac{1}{2}\,\frac{r}{a}$ con error $\Delta < \frac{1}{8}\,\frac{r^2}{a^3}$.

EJERCICIOS:

Verificar, aplicando el desarrollo del binomio los valores de los siguientes números:

1 $\sqrt[3]{120} = 4{,}9324;$

2. $\dfrac{1}{412} = 0{,}002487;$

3 $\dfrac{1}{\sqrt[5]{30}} = 0{,}529;$

4 $\sqrt{\dfrac{26}{25}} = 1{,}0198;$

5 $\sqrt[4]{\dfrac{17}{16}} = 1{,}000013;$

6. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{15}} = 0{,}5080;$

7 $\sqrt[4]{17} = 2{,}0305;$

8. $\sqrt[3]{26} = 2{,}9625,$

9. $\sqrt[3]{9} = 2{,}08009;$

10 $\sqrt[7]{2000} = 2{,}96194;$

11 $\sqrt[5]{35} = 2{,}03617.$

SERIES DE arc sen x Y Arg Sh x: Gracias a la serie del binomio se puede escribir

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(-x^2)^2 + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \cdots \text{ si } |x| < 1.$$

Integrando esta serie resulta la serie del arco sen x, ya estudiada por NEWTON en 1711:

$$\text{arc sen } x = x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{x^7}{7} + \cdots$$

también convergente si es $|x| < 1$.

Análogamente es

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(x^2) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2)^2 + \cdots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \cdots \text{ si } |x| < 1.$$

Integrando esta serie se tiene

$$\text{Arg Sh } x = x - \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{x^7}{7} + \cdots \text{ si } |x| < 1.$$

En ambos casos la constante de integración es nula por ser arc sen 0 = Arg Sh 0 = 0.

EJERCICIOS:

1. Calcular el valor de π partiendo de la relación

$$\text{arc sen}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}\pi.$$

2. Calcular arc sen 1.

R: 1,5708. . . .

3. Verificar la serie

$$(1 - x)\ \text{arc sen}\ x = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{3} + \\ + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^6}{5} + \cdots.$$

4 Calcular por división de series el desarrollo

$$\frac{\text{arc sen}\ x}{\sqrt{1 - x^2}} = x + \frac{2}{3}x^3 + \cdots.$$

Verificar las siguientes series.

5 $\sqrt{1 - \text{tg}\, x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{11}{48}x^3 - \frac{47}{384}x^4 - \cdots.$

6 $\frac{1}{\sqrt{5 - e^x}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16}x + \frac{11}{256}x^2 + \frac{151}{6\,144}x^3 + \cdots.$

7 $\sqrt{4 + \text{sen}\, t} = 2 + \frac{1}{4}t - \frac{1}{64}t^2 - \frac{61}{1\,536}t^3 + \cdots.$

8 $\sqrt{1 + e^{-x}} = \frac{1}{16}\left[23 - 7x + 3x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \cdots\right]$

9 $\sqrt{2 - \cos x} = \sqrt{2}\left[\frac{1\,351}{2\,048} + \frac{1\,169}{1\,024}x^2 - \frac{231}{6\,144}x^4 + \cdots\right].$

8. CALCULO DE LIMITES INDETERMINADOS

Ya hemos estudiado detenidamente en el Capítulo IX el cálculo de límites mediante la regla de L'Hospital y sus adaptaciones a los siete casos clásicos de indeterminación.

El conocimiento de los desarrollos en serie de potencias facilita en muchos casos el cálculo evitando las derivaciones sucesivas que, generalmente, son cada vez más complicadas.

EJEMPLOS:

1º) Para calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x-\frac{1}{2}x^2}{x^4},$$

que es de la forma $\frac{0}{0}$ habría que aplicar la regla de L'Hospital cuatro veces para salvar la indeterminación. Utilizando ahora el desarrollo en serie de $\cos x$ resulta:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x-\frac{1}{2}x^2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}x^2-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\cdots}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{4!}+\frac{x^2}{6!}-\cdots\right)=-\frac{1}{4!}=-\frac{1}{24}.$$

2º) Calcular

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\operatorname{tg}x}\right).$$

que es de la forma $\infty-\infty$.

Como, de acuerdo a lo visto en la página 555, es:

$$\operatorname{tg}x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots$$

resulta

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\operatorname{tg}x}=\frac{\operatorname{tg}x-x}{x^2\operatorname{tg}x}=\frac{\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots\right)-x}{x^3\left(1+\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{15}x^4+\cdots\right)}.$$

Haciendo la resta indicada y simplificando el factor x^3 resulta

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\operatorname{tg}x}\right)=\frac{1}{3}.$$

EJERCICIOS·

Verificar los siguientes límites:

1 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$

2 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x-\operatorname{tg}x}{x^3}=-\frac{1}{2}.$

3 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}.$

4 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^2)-\operatorname{sen}^2 x}{x^4}=\frac{1}{3}.$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right]=\infty.$

6 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}x}-\frac{1}{x}\right]=0.$

7. $\lim_{x\to 0} \frac{x - \text{arc tg}\, x}{\text{tg}^3 x} = \frac{1}{3}.$

8 $\lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$

9. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}\, x - x}{x^3} = \frac{1}{3}.$

10 $\lim_{x\to 0} \frac{\text{arc sen}\, x - x}{x^3} = \frac{1}{6}.$

11. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{x^2} = -\frac{3}{2}.$

12. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, 2x - 2\,\text{sen}\, x}{\text{sen}^3 x} = -1.$

13 $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}\, x - \text{sen}\, x}{\text{tg}^3 x} = \frac{1}{2}.$

14 $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}\, 9x}{\text{tg}\, 3x} = 3.$

15. $\lim_{x\to 0} \left[\text{cosec}^2 x - \frac{1}{x^2}\right] = \frac{1}{3}.$

16 $\lim_{x\to 0} \left[\text{cotg}\, x - \frac{1}{x}\right] = \infty.$

17. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x} - 4x}{x - \text{sen}\, x} = 16.$

18 $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\text{sen}\, x}}{x - \text{sen}\, x} = 1.$

19 $\lim_{t\to 0} \frac{\text{sen}\, t + e^t - 1}{\ln(1+t)} = 2.$

20. $\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x^2} - \text{cotg}^2 x\right] = \frac{2}{3}.$

9. CALCULO DE LAS INTEGRALES ELIPTICAS

1º) Al estudiar la rectificación de la elipse se nos presentó la expresión

$$E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \,\text{sen}^2 \varphi}\, d\varphi \qquad [1]$$

siendo $k > 0$, la excentricidad de la elipse definida por la relación: $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$, y φ el parámetro que define la curva de acuerdo a las ecuaciones:

$$x = a \,\text{sen}\, \varphi, \qquad y = b \cos \varphi.$$

Como vimos, la integral [1] no se puede calcular mediante las funciones elementales y la designamos con el nombre de *integral elíptica de segunda especie.* Para calcular sus valores numéricos y en esta forma preparar las tablas como las que figuran en las páginas 54 a 56 del Apéndice, se utiliza el desarrollo en serie del binomio.

En el caso particular de un cuarto de elipse resulta para $\varphi = \frac{1}{2}\pi$:

$$E(k. \tfrac{1}{2}\pi) = E_1(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \,\text{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - \tfrac{1}{2} k^2 \,\text{sen}^2 \varphi - \frac{k^4}{2 \cdot 4} \,\text{sen}^4 \varphi - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \,\text{sen}^6 \varphi + \cdots]\, d\varphi.$$

Recordando que es $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n} x\, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \frac{1}{2}\pi$ de acuerdo a lo visto en la página 400, resulta

$$E_1(k) = \frac{1}{2}\pi\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{k^2}{1} - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \cdots\right].$$

Verifíquese que para $k = 0{,}5$ es $E_1(0{,}5) \sim 1{,}4675$.

En la página 420 hemos calculado, utilizando las tablas de funciones elípticas, la longitud de una elipse de semiejes $a = 5$, $b = 3$. Se obtuvo $L = 4aE_1(k)$. Como es $k = \frac{4}{5} = 0{,}8$ resulta con el desarrollo en serie:

$$E_1(0{,}8) = \frac{1}{2}\pi\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 (0{,}8)^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{(0{,}8)^4}{3} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{(0{,}8)^6}{5} - \cdots\right] = 1{,}570796 \times 0{,}815415 \sim 1{,}28085$$

y la longitud de la elipse es, en este caso, 25,6170.

En HÜTTE: *Manual del Ingeniero*, I, pág. 126, ed. 1938, se dan otras fórmulas para calcular la longitud de una elipse.

2°) En la teoría del péndulo simple en el vacío se demuestra que el período de oscilación es

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\, F_1 \qquad [1]$$

siendo F_1 la integral elíptica completa de 1ª especie:

$$F_1(k) = F(k, \frac{1}{2}\pi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

en la cual el parámetro k es igual a $\operatorname{sen} \frac{1}{2}\varphi_0$, con φ_0 amplitud inicial.

Teniendo en cuenta que por la fórmula del binomio es

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = (1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi +$$

$$+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \operatorname{sen}^4 \varphi + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \operatorname{sen}^6 \varphi + \cdots$$

e integrando término a término resulta de acuerdo al valor antes mencionado de la integral de $\operatorname{sen}^{2n} x$:

$$F_1(k) = \frac{1}{2}\pi\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right].$$

Si k es muy pequeño, limitándonos al primer término de la serie resulta

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad [2]$$

que es la fórmula elemental válida sólo para pequeños valores de la amplitud inicial φ_0 *(ley del isocronismo).*

Considerando dos términos de la serie y adoptando como valor de $k = \operatorname{sen}\frac{1}{2}\varphi_0$, la aproximación $k \sim \frac{1}{2}\varphi_0$, se llega a la fórmula generalmente utilizada en las medidas de cierta precisión

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \frac{\varphi_0^2}{16}\right] \qquad [3]$$

que muestra que el péndulo no cumple la ley del isocronismo sino que el período depende de la amplitud inicial φ_0.

Considerando la fórmula [3] como exacta, el error relativo de [2] es $\frac{1}{16}\varphi_0^2$, donde φ_0 se mide en radianes.

Resulta para

φ_0 =	10°	20°	22°	30°	60°	90°
Error relativo de [2] =	0,0019	0,0076	0.0092	0,017	0,068	0,154

Considerando los valores dados por la fórmula exacta [1] resultan (utilizando las tablas de funciones elípticas), los errores relativos

0,0019 0,0076 0.0092 0,017 0,073 0,180

lo cual muestra que hasta los 22° aproximadamente, el error de [2] ó [3] no llega al 1 %.

10. CALCULO APROXIMADO DE INTEGRALES

Numerosas integrales que no pueden calcularse elementalmente pueden expresarse mediante desarrollos en serie, tal como hemos visto en el caso de las integrales elípticas.

Tal es lo que ocurre con la integral definida

$$I = \int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{x}\,dx.$$

Por ser

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

resulta

$$\frac{e^x - e^{-x}}{x} = 2 + \frac{2x^2}{3!} + \frac{2x^4}{5!} + \cdots,$$

que es una serie convergente para todo valor de x. Integrando término a término entre 0 y 1 se tiene:

$$I = 2 + \frac{2}{3 \cdot 3!} + \frac{2}{5 \cdot 5!} + \cdots \sim 2{,}057.$$

EJERCICIOS:

Aplicando los desarrollos en serie de potencias, verificar las expresiones aproximadas de las siguientes integrales:

1. $$\int_0^x \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx = \frac{x}{2!} - \frac{1}{4!}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{6!}\frac{x^5}{5} - \cdots.$$

2 $$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \cdots.$$

3. $$\int_0^x e^{-x^2}\, dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!}\frac{x^5}{5} - \frac{1}{3!}\frac{x^7}{7} + \cdots.$$

4. $$\int_0^x \operatorname{sen}(x^2)\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3!}\frac{x^7}{7} + \frac{1}{5}\frac{x^{11}}{11} - \cdots.$$

(Caso particular entre 0 y 1: $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\, dx = 0{,}3103$).

5. Idem de la integral

$$\int_1^x \frac{e^x}{x}\, dx.$$

Solución: $\frac{e^x}{x} = \frac{1 + e^x - 1}{x}$ e integrando:

$$\int_1^x \frac{e^x}{x}\, dx = \int_1^x \frac{dx}{x} + \int_1^x \frac{e^x - 1}{x}\, dx =$$

$$= \ln x + \int_1^x \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots\right) dx =$$

$$= \ln x + x + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

Aplicando el desarrollo en serie de la función subintegral, verificar el valor aproximado de las siguientes integrales definidas

6. $\int_0^1 e^{-x}\cos x\,dx = 0{,}0819$.

7. $\int_0^2 \sqrt{1-x}\,\operatorname{arc\,tg} x\,dx = -0{,}9166$.

8. $\int_0^{1/2} \frac{\cos x}{1+x}dx = 0{,}3914$

9. $\int_0^2 \frac{\cos x}{\sqrt{1+x}}\,dx = 0.9833$.

10. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+\operatorname{sen} x}\,dx = 0{,}075$.

11. $\int_0^4 \ln(1+\sqrt{x})\,dx = 0{,}1666$.

12. $\int_0^{1/2} \frac{e^{-x^2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0{,}4815$

13. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = 0{,}93$.

14. $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^3}\,dx = 1{,}3964$.

15. $\int_0^1 \sqrt{1-\operatorname{sen} x}\,dx = \frac{13}{24}$.

16. $\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\,dx = \frac{39}{32}$.

17. Calcular el valor aproximado de

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x^3}}.$$

Solución: Dado que es

$$\frac{1}{\sqrt{2+x^3}} = (2+x^3)^{-\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)2^{-\frac{3}{2}}x^3 + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)2^{-\frac{5}{2}}x^6 + \cdots,$$

integrando término a término esta serie alternada resulta:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x^3}} = 2^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}2^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{8}2^{-\frac{5}{2}}\cdot\frac{1}{7} - \frac{5}{16}2^{-\frac{7}{2}}\cdot\frac{1}{10} + \cdots =$$

$$= 2^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{16} + \frac{3}{224} - \frac{1}{256} + \cdots\right) \sim 0{,}670.$$

(Esta integral ya ha sido calculada anteriormente empleando el método de los trapecios, en la pág. 378).

11. DESARROLLOS ASINTOTICOS

Desde un punto de vista teórico, cuando se ha determinado que una serie es convergente se está seguro que se podrá calcular su suma con tanta aproximación como se quiera con tal de tomar un número suficientemente grande de términos. Tal es lo que ocurre con las series convergentes

$$\text{(I)}\quad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

$$\text{(II)}\quad 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \cdots$$

$$\text{(III)}\quad 1 + \frac{10^3}{1!} + \frac{10^6}{2!} + \cdots + \frac{10^{3n}}{n!} + \cdots.$$

La serie (I) cuya suma es $\frac{1}{6}\pi^2$ tiene una convergencia relativamente lenta: con la suma de 10 términos se comete un error del orden de la décima (como puede apreciarse sea directamente pues es $S_{10} \sim 1,55$, sea comparando con la integral de Cauchy).

La serie (II) tiene la ventaja de ser alternada de modo que al sumar un número cualquiera de términos se sabe que el error cometido es inferior al primer término que no se considera. Sumando 10 términos el error será inferior a $\frac{1}{11^2}$; efectuando los cálculos se obtiene 0,8179 que difiere del valor exacto $\frac{\pi^2}{12}$ en menos de 0,005.

La serie (III) también es convergente como se ve aplicando el criterio de D'Alembert pues el cociente de 2 términos consecutivos es $\frac{1\,000}{n}$ que tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Pero los primeros 1 000 términos son crecientes y mayores que 1, de modo que el cálculo efectivo de la suma será muy penoso.

Existen por el contrario algunas series *divergentes* de un tipo especial que permiten calcular numéricamente valores de algunas funciones.

Así por ejemplo hemos demostrado que la serie

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

es convergente si es $-1 < x \leqslant 1$.

Para valores $x > 1$, la serie es divergente. Pero si x no está muy distante de 1, los primeros términos de la serie alternada serán decrecientes, de modo que deteniéndose en el término de menor valor se tendrá un valor aproximado del logaritmo y una cota del error.

Para $x = 1,1$ resulta

$$\ln 2,1 = 1,1 - \frac{1,1^2}{2} + \frac{1,1^3}{3} - \cdots .$$

Los términos decrecen hasta llegar al undécimo. La suma de

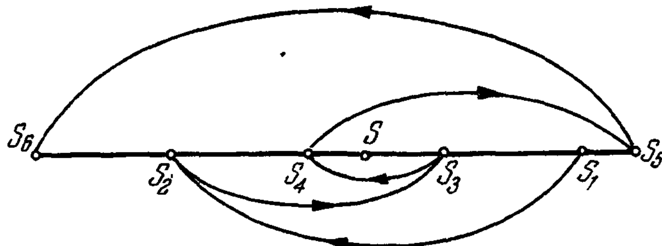


Fig. XV-5. — Comportamiento de las sumas parciales de una serie asmtótica. Hasta un cierto valor de $n = r$ (en este caso $r = 4$), las sumas S_n se acercan a S y luego se van alejando cada vez más

los 10 primeros términos es 0,8719 y de los 11 primeros 0,6097. El promedio de estos valores es 0,7408 cuyas dos primeros cifras son exactas pues es $\ln 2{,}1 = 0{,}7419$.

LA FUNCIÓN ERROR: En la teoría de los errores basada en el cálculo de probabilidades se presenta la *función error* $\phi(x)$:

$$\phi(x) = ERF\ (x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}\,dx.$$

Esta función $\phi(x)$ no se puede expresar mediante una combinación de funciones elementales. Para conocer sus valores se recurre al desarrollo en serie de la exponencial y a la integración término a término:

$$\phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \left[1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots\right]dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} + \cdots\right]$$

Aplicando el criterio del cociente se ve que esta serie converge para todos los valores de x. Además, tratándose de una serie alternada es fácil calcular el error.

Verifique el lector los siguientes valores de $\phi(x)$ con todas sus cifras exactas:

$$\phi(0{,}1) = 0{,}1125;\quad \phi(0{,}3) = 0{,}3286;\quad \phi(0{,}6) = 0{,}6039.$$

(El valor de $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ es 1,12838, los valores de $\phi(x)$ se encuentran en la tabla XVI del apéndice).

A pesar de que la serie es convergente para todos los valores de x, su convergencia es muy lenta, cuando x es grande, por lo que resulta inapropiada para el cálculo numérico; ya para asegurar 4 decimales exactos para $x = 2$ deben considerarse 17 términos de la serie.

Deduciremos otro desarrollo de $\phi(x)$ de tipo asintótico, dado por una serie no convergente pero que proporciona mediante la suma de sus primeros términos un óptimo valor de la función.

Recordemos la integral de Poisson (pág. 402)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

que podemos escribir

$$2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Entonces será

$$2\int_x^{\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx - 2\int_0^x e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} - \sqrt{\pi}\,\phi\ (x).$$

La integral del primer miembro, haciendo la sustitución $x^2 = z$ e integrando por partes, resulta:

$$\int_z^\infty e^{-z} z^{-\frac{1}{2}} dz = -\int_z^\infty z^{-\frac{1}{2}} d(e^{-z}) = \left[-z^{-\frac{1}{2}} e^{-z}\right]_z^\infty - \frac{1}{2}\int_z^\infty z^{-\frac{3}{2}} e^{-z} dz =$$

$$= z^{-\frac{1}{2}} e^{-z} + \frac{1}{2}\left[z^{-\frac{3}{2}} e^{-z}\right]_z^\infty + \frac{3}{2^2}\int_z^\infty z^{-\frac{5}{2}} e^{-z} dz =$$

$$= e^{-z}\left[z^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} + \frac{1\cdot 3}{2^3} z^{-\frac{5}{2}} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3} z^{-\frac{7}{2}} + \dots\right].$$

Por consiguiente se tiene

$$\phi(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-x^2} dx = 1 - \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\left[1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1\cdot 3}{(2x^2)^2} - \cdots\right].$$

Para $x = 2$, puesto que es $e^{-4} = 0{,}009158$ con tres términos de la serie resulta $\phi(2) = 0{,}9953$.

12. SERIES DIVERGENTES

El estudio de las series divergentes excede de los marcos de este libro. Nos limitaremos a desarrollar unas pocas nociones relativas a este importante tema.

Un teorema de Cauchy sobre sucesiones: Consideremos la sucesión $S_0, S_1, \dots, S_n, \dots$ que converge hacia el valor S.

Demostraremos que la media aritmética $(S_0 + S_1 + \cdots + S_{n-1}):n$, cuando $n \to \infty$, también tiende a S:

$$\frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_{n-1}}{n} \to S.$$

En efecto, si $S_n \to S$, de acuerdo a la definición de límite, la diferencia $S_n - S$ puede hacerse, en valor absoluto, tan pequeña como se quiera, por ejemplo menor que ε, a partir de un valor $n = m$. Fijado así el valor m, escribimos:

$$\frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_{n-1}}{n} = \frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_{m-1}}{n} + \frac{S_m + S_{m+1} + \cdots + S_{n-1}}{n} =$$

$$= \frac{(S_0 - S) + (S_1 - S) + \cdots + (S_{m-1} - S)}{n} + \frac{mS}{n} + \frac{(S_m - S) + (S_{m+1} - S) + \cdots + (S_{n-1} - S)}{n} + \frac{(n-m)S}{n}.$$

El segundo término sumado al cuarto es S; el tercer término es, en valor absoluto, inferior a $\frac{\varepsilon(n-m)}{n}\cdot$ El primer término puede hacerse también tan pequeño como se quiera tomando n suficientemente grande y teniendo en cuenta que m resulta fijado de acuerdo al valor de ε. Por consiguiente puede hacerse que el promedio aritmético de la sucesión difiera de S tan poco como se quiera, con lo cual queda demostrado que su límite es S.

Interesa destacar que una sucesión puede no tener límite y tenerlo en cambio la sucesión de sus promedios aritméticos. Tal es el caso de la sucesión oscilante

$$1;\ 0;\ 1;\ 0;\ 1;\ 0;\ \ldots \qquad [1]$$

en la cual la sucesión de las medias aritméticas es

$$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{4};\ \frac{3}{5};\ \frac{3}{6};\ \ldots,$$

que tiende evidentemente a $\frac{1}{2}\cdot$

Esto da la posibilidad de definir como *límite generalizado de una sucesión* al límite de la sucesión de los promedios aritméticos.

Cuando dada una sucesión, converge la sucesión de sus promedios aritméticos, se dice que la sucesión tiene límite *Cèsaro*, o más precisamente $(C,1)$ (*Cèsaro* 1). Así se dice que el límite $(C,1)$ de la serie [1] es $\frac{1}{2}\cdot$

Más general. si la sucesión de las medias aritméticas no es convergente, pero sí lo es la sucesión de las medias de la sucesión, se dice que la sucesión tiene límite $(C,2)$, (*Cèsaro* 2). Tal es el caso de la sucesión oscilante: $1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$, que no tiene límite $(C,1)$ pero cuyo límite $(C,2)$ es $\frac{1}{4}\cdot$

En el caso de una serie $\sum u_n$ formamos las sumas parciales S_n y si no existe límite ordinario de esta sucesión calculamos su *límite Cèsaro.* Si este límite existe se dice que la serie es *sumable Cèsaro.*

Así por ejemplo, la serie

$$1-1+1-1+1-\ldots,$$

no tiene suma en el sentido ordinario, pero como la sucesión de las sumas parciales es

$$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \ldots$$

y tiene límite $(C,1)$ igual a $\frac{1}{2}$, se dice que la suma generalizada de la serie es $\frac{1}{2}\cdot$

Vale la pena señalar que si en el desarrollo en serie de potencias

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots,$$

válido si $-1 < x < 1$, se reemplaza en ambos miembros x por el valor 1, resulta la sorprendente relación

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots,$$

en coincidencia con el resultado anterior.

Leibniz asignó en 1713 este valor $\frac{1}{2}$ a la serie $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$, pero lo hizo en base a argumentos probabilísticos y consideraciones metafísicas.

En cambio Euler, estuvo más cerca del concepto actual, al expresar en 1743, su célebre principio: "*La suma de una serie es el valor de aquella expresión finita del desarrollo de la cual esa serie ha surgido*". En el ejemplo que hemos considerado, la expresión finita es $\frac{1}{1+x}$.

Cuando se hizo la fundamentación rigurosa del análisis matemático, las series divergentes fueron dejadas de lado. Es conocido el anatema de Abel de 1828: "*Las series divergentes son una invención del diablo y es vergonzoso que haya quien se base en ellas al hacer cualquier demostración*".

Sin embargo, los hechos exigieron darles carta de ciudadanía a estas "invenciones del diablo" y cuando su suma fué *definida* por Césaro en 1890 se inició un capítulo importante de la matemática, cuyos resultados se aplican en las teorías físicas del siglo actual.

Los aportes fundamentales de E. Borel, K. Knopp, F. Hausdorff, etc., pueden estudiarse en

E. Borel: *Leçons sur les séries divergentes*, Gauthiers Villars, 2ª ed., 1928.

J. Rey Pastor: *Teoría de los algoritmos lineales de convergencia y de sumación*. (Trabajos del Seminario Matemático Argentino, Nº 5, 1931).

G. H. Hardy: *Divergent Series*, Oxford at the Clarendon Press, 1949.

INDICE ALFABETICO

INDICE ALFABETICO

(La notación (T) 8 indica que se trata de la pág. 8 del apéndice de tablas)


SE TERMINO DE IMPRIMIR
EN EL MES DE MAYO DE 1980
EN C.P.C. IMPRESORES
VIEL 1444 - CAPITAL FEDERAL